KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)
Tél. : 01 43 31 40 30
www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. Plus de 5 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2010 - Corrigé de l'épreuve Juniors

1. Réponse **A.** $2010 - 201 = 1809$.

2. Réponse **B.** On sait que 3 pommes mesurent 99 cm. 1 pomme mesure donc 33 cm et 165 cm est la hauteur de 5 pommes ($5 \times 33 = 165$).

3. Réponse **C.** Dans le tableau, chacune des 10 premières colonnes est de la forme : $x, x + 10$. Donc pour avoir des lignes de même somme, on doit avoir $\Delta = 2010 - 100$, soit $\Delta = 1910$.

4. Réponse **D.** $20102010 = (2010 \times 10\,000) + 2010 = 2010 \times 10\,001$.

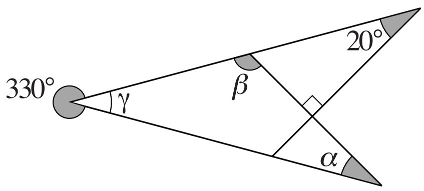
5. Réponse **E.** $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.

6. Réponse **E.** Il est facile de tracer carré, trapèze, triangle isocèle et triangle rectangle à partir des sommets donnés (d'ailleurs 4 points formant un carré suffisent). On ne peut pas tracer de triangle équilatéral (affirmation dure à démontrer, mais ce n'est pas nécessaire).

7. Réponse **C.** De la comparaison de Jean et Tibor, il résulte que 1 point c'est 5% du total des points possibles. Ce total est donc 20.

8. Réponse **B.** Une face d'un petit cube mesure $24/6 = 4$ cm^2.
Le solide a 16 petites faces, sa surface est donc $16 \times 4 = 64$ cm^2.

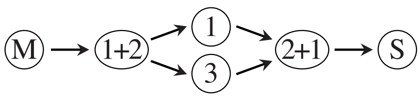
9. Réponse **D.** On a :
$\gamma = 360° - 330° = 30°$;
$\beta = 90° + 20° = 110°$
et
$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 40°$.



10. Réponse **B.** Pour que le produit des chiffres d'un entier soit 2, il faut que tous ses chiffres soient des 1 sauf un qui est un 2. Le nombre cherché est donc composé d'un seul 2 et de 1. Si la somme des chiffres vaut 2010, la somme des 1 vaut 2008. Le nombre a donc 2009 chiffres. Le 2 peut occuper chacune des ces 2009 places, il y a donc 2009 tels nombres.

11. Réponse **C.** Voici toutes les décompositions de 2010 en produit de 2 facteurs entiers :
$2010 = 2010 \times 1 = 1005 \times 2 = 367 \times 3 = 402 \times 5 = 335 \times 6 = 201 \times 10$
$= 134 \times 15 = 67 \times 30$.
Le seul de ces produits compatible avec des âges est 67×30.
Le professeur a donc 30 ans (et son père 67).

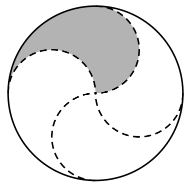
12. Réponse **B.** À cause des symétries de la figure, on peut, pour le calcul des sommes, réduire le schéma donné au schéma suivant :



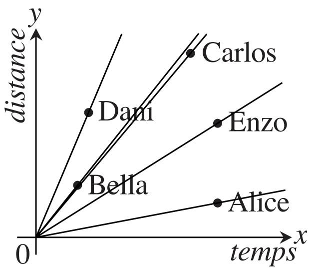
On ne peut obtenir que deux sommes différentes : 7 et 9.

13. Réponse **A.** Le triangle FJK est isocèle (FJ = JK = 1) et rectangle car l'angle en J est un assemblage d'un angle de 30° et d'un angle de 60°. On a donc $FK = \sqrt{2}$.

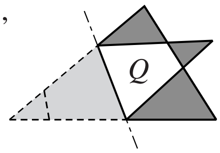
14. Réponse **E.** On remarque tout d'abord que, si un mardi est un jour pair, le mardi suivant est un jour impair. Pour avoir 3 mardis pairs un même mois, il faut que le mois contienne 5 mardis ; le premier et le dernier sont séparés de 28 jours ; ils ne peuvent être que le 2 et le 30. Le 23 est alors aussi un mardi et le 21 est un dimanche.



15. Réponse **C.** Un quart de grand cercle mesure :
$\frac{1}{4} \times 2\pi \times 4 = 2\pi$ (en cm).
Une moitié de petit cercle mesure :
$\frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = 2\pi$ (en cm).
Le périmètre d'une des 4 parties est constitué de 3 morceaux, chacun de longueur 2π, il vaut donc 6π.



16. Réponse **D.**
Vitesse = distance/temps = y/x.
Les vitesses sont les pentes des droites passant par l'origine et le point représentant la position de chaque participant à la course.
Traçons ces droites (voir figure).
Celle qui a la pente la plus grande est celle de Dani.



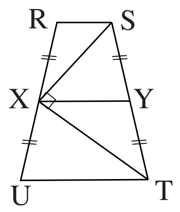
17. Réponse **B.** Si Q est l'aire du quadrilatère blanc, l'aire du polygone à 7 côtés obtenu après pliage est $Q+1$ (donnée de l'énoncé).
L'aire du triangle de départ est $Q+1+Q$ soit $2Q+1$. La relation sur les aires donne :
$2Q+1 = 1{,}5 \times (Q+1)$. D'où $0{,}5 \times Q = 0{,}5$ et $Q = 1$.
L'aire du triangle de départ vaut 3.

18. Réponse **C.** Appelons x la longueur, en mètres, de l'arrière d'un chariot (partie qui dépasse d'un chariot rangé dans un autre) et y celle de l'avant (partie encastrée dans le chariot précédent).
On a : $10x + y = 2{,}9$
et $20x + y = 4{,}9$.
Donc : $x = 0{,}2$ et $y = 0{,}9$.
La longueur d'un chariot est $x + y$, soit 1,1 m.

19. Réponse **B.** En remplissant deux grilles de façon complémentaire (en remplaçant dans la deuxième chaque « vrai » par un « faux » et chaque « faux » par un « vrai »), on est sûr qu'une des deux grilles aura au moins 5 bonnes réponses.

20. Réponse **C.** Les quatre pieuvres ayant des affirmations contradictoires, soit elles mentent toutes, soit une seule dit la vérité.
Il est impossible qu'elles mentent toutes (car on aurait 4×7, soit 28 tentacules au total, ce qui est contradictoire avec le fait que la pieuvre bleue mente). Il y a donc une pieuvre qui dit la vérité (et qui a 6 ou 8 tentacules) et 3 pieuvres qui mentent (et ont au total 21 tentacules). Celle qui dit la vérité ne peut avoir 8 tentacules car le total serait alors 29 qui n'est donné par aucune pieuvre. Elle a donc 6 tentacules pour un total de 27 et c'est la verte.

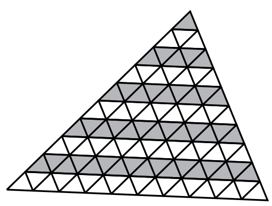
21. Réponse **B.** Soit Y le milieu de [ST].
$XY = YS = YT = 1$ (médiane dans le triangle rectangle XST).
Et le « théorème des milieux » dans le trapèze dit que (XY) est parallèle aux bases et que
$XY = \frac{RS + UT}{2}$.
On en déduit que $RS + UT = 2\ XY = 2$.
Et le périmètre du trapèze RSTU est $2 + 2 + 2$, soit 6.



22. Réponse **D.** Pour que le chiffre des dizaines, moyenne du chiffre des centaines et de celui des unités, soit entier, il faut que ces deux derniers aient la même parité. Pour tout chiffre de 1 à 9, il y a cinq chiffres de même parité. Ainsi, une fois choisi le chiffre des centaines, on peut fabriquer 5 nombres de la forme demandée (exemple avec 1 au chiffre des centaines : 111, 123, 135, 147, 159).
Il y a 9 possibilités pour le chiffre des centaines et $9 \times 5 = 45$.

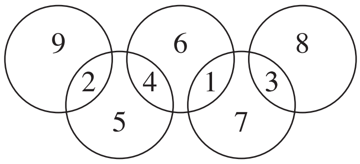
23. Réponse **C.** Si n est pair, alors n^n est un carré. En effet, si $n = 2p$, alors $n^n = (2p)^{2p} = [(2p)^p]^2$ qui est bien un carré.
Il y a 50 nombres pairs de 1 à 100.
Si n est impair et carré, alors n^n est aussi carré ($n = q^2$ et $[q^2]^n = [q^n]^2$).
Les carrés impairs entre 1 et 100 sont 1, 9, 25, 49 et 81.
Si n est impair et non carré, sa décomposition en facteurs premiers contient au moins un facteur à une puissance impaire ; dans la décomposition de n^n, ce même facteur reste (puisque n est impair) à une puissance impaire ; n^n ne peut donc pas être un carré.
Finalement, 55 nombres conviennent.

24. Réponse **C.** En dessinant 9 segments parallèles au côté gauche et 9 segments parallèles au côté droit, on obtient un « trillage » formé de
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$,
soit 100 petits triangles.



On compte alors $1 + 5 + 9 + 13 + 17$, soit 45 petits triangles grisés ; qui représentent donc 45% du total.

25. Réponse **6.** Seule configuration possible (à une symétrie près) :



L'étude se fait à partir des décompositions de 11 en somme de 2 nombres de 1 chiffre ($9+2$, $8+3$, $7+4$, $6+5$) ou de 3 nombres de 1 chiffre ($1+2+8$, $1+3+7$, $1+4+6$, $2+3+6$, $2+4+5$).
Le nombre 9 n'intervient que dans une seule décomposition ; les nombres du premier disque sont donc 9 et 2.
Les six nombres dans les deux cercles du bas ont pour somme 22. Or la seule manière d'obtenir 22 avec six nombres différents est :
$1+2+3+4+5+7$.
Une fois placés 9 et 2, alors 8 est nécessairement avec 3 dans l'autre cercle ne comprenant que deux nombres. Seul reste 6 pour être à la place du point d'interrogation.

26. Réponse **7.**
Les triangles successifs OA_1A_2, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$ … sont isocèles et leurs angles à la base sont successivement α, 2α, 3α, etc.
La construction cesse d'être possible (sans recouper le segment précédent) à la première valeur de n telle que $n\alpha$ dépasse 90°.
Le premier n tel que $13n > 90$ est 7.
On pourra dessiner 6 triangles, le dernier étant $A_5A_6A_7$, ce qui donne 7 segments tracés dans le processus du zigzag.