Kangourou des Mathématiques

L'association *Kangourou Sans Frontières* organise le jeu-concours *Kangourou* pour plus de cinq millions de participants dans le monde.

Jeu-concours 2009 • Durée : 50 minutes

Épreuve Étudiants, sujet S

• L'épreuve est individuelle. **Les calculatrices sont interdites**.

• **Il y a une seule bonne réponse par question**. Les bonnes réponses rapportent 3, 4 ou 5 points selon leur difficulté (premier, deuxième et troisième tiers de ce questionnaire), mais une réponse erronée coûte un quart de sa valeur en points. Si aucune réponse n'est donnée, la question rapporte 0 point.

• Il y a deux manières de gagner des prix : « crack » (au total des points) et « prudent » (au nombre de réponses justes consécutives depuis la première question).
Les classements sont séparés pour les **Terminale S** et pour les étudiants (**Bac +**).

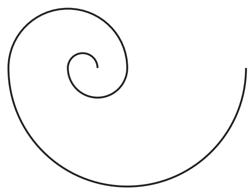
---

1 À la cafétéria du 2009 avenue du 14 juillet, Marie, Vanda et Oscar ont pris, chacun, la formule du jour. Parmi les nombres suivants, lequel peut être le total de leur addition ?
A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 2009

2 Combien vaut $\dfrac{2009}{41} + \dfrac{2009}{49}$?
A) 60 B) 90 C) 100 D) $\dfrac{2009}{90}$ E) 2009

3 L'opérateur « ✇ » multiplie par 2 tout entier pair et par 3 tout entier impair.
Combien vaut (✇(✇5)) ?
A) 35 B) 30 C) 40 D) 45 E) 60

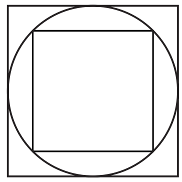
4 La spirale représentée ci-contre est composée de quatre demi-cercles.
Le rayon du plus petit est 1 et chaque rayon est le double du précédent.
Quelle est la longueur de la spirale ?
A) 7π B) 10π C) 11π
D) 14π E) 15π



5 Quel est le plus grand des nombres suivants ?
A) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ E) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

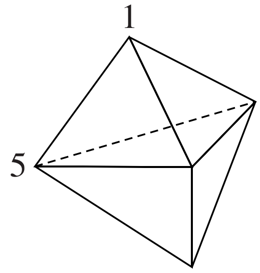
6 Un aquarium contient deux cents poissons. 1 % de ces poissons sont des poissons bleus, les autres sont jaunes. Combien de poissons jaunes faut-il enlever de l'aquarium de telle sorte que l'aquarium contienne 2 % de poissons bleus ?
A) 2 B) 4 C) 20 D) 50 E) 100

7 Un cercle est inscrit dans un carré et exinscrit dans un autre.
Quel peut être le quotient des aires des deux carrés ?



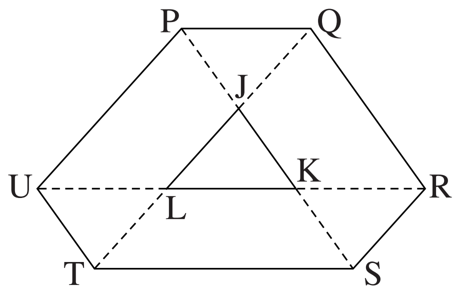
A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{9}{4}$ E) $\sqrt{2}$

8 La figure montre un solide formé de 6 faces triangulaires.
On écrit un nombre à chaque sommet. Deux nombres 1 et 5 sont déjà placés. Les trois autres nombres sont tels que les sommes des 3 nombres aux sommets de chacune des faces soient égales.
Combien vaut la somme des nombres écrits aux 5 sommets ?



A) 9 B) 12 C) 17
D) 18 E) 24

9 Les côtés d'un triangle JKL sont prolongés et, comme sur la figure, on construit les points P, Q, R, S, T et U tels que :
PJ = JK = KS, TL = LJ = JQ, UL = LK = KR.
Si l'aire du triangle JKL est 1, quelle est l'aire de l'hexagone PQRSTU ?

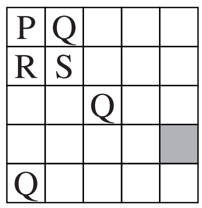


A) 9 B) 10 C) 12
D) 13 E) il manque une information

10 Une boîte contient des chaussettes : deux blanches, trois rouges et quatre bleues. Claudie sait qu'un tiers de ces chaussettes ont un trou mais elle ne se souvient plus de quelles couleurs sont ces chaussettes endommagées. Au hasard, elle sort des chaussettes de la boîte et espère obtenir une paire de la même couleur et sans trou. Quel nombre minimum de chaussettes doit-elle tirer pour être certaine d'obtenir une telle paire ?
A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 8

11 Dans le plan, les cercles de centre F et de rayon 13 et de centre G et de rayon 15 se coupent aux points P et Q. Sachant que la longueur PQ est 24, parmi les nombres suivants, lequel peut être la longueur FG ?
A) 2 B) 5 C) 9 D) 14 E) 18

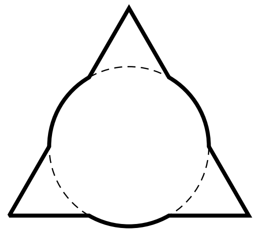
12 On souhaite remplir chaque petit carré de la grille ci-contre en utilisant les lettres P, Q, R et S de telle sorte que les lettres de deux carrés « voisins » soient différentes (deux carrés sont dits « voisins » s'ils ont en commun un côté ou un sommet). Certaines lettres ayant été placées comme sur le dessin, quelles sont les seules lettres possibles pour le carré en gris ?



A) P ou Q B) seulement R C) seulement S
D) R ou S E) P, Q, R, ou S

13 2009 kangourous qui sont soit clairs soit sombres comparent leurs tailles. On constate qu'un certain kangourou clair est plus grand qu'exactement 8 kangourous sombres, qu'un autre kangourou clair est plus grand qu'exactement 9 kangourous sombres, qu'un autre kangourou clair est plus grand qu'exactement 10 kangourous sombres, et ainsi de suite jusqu'au dernier kangourou clair qui est plus grand que tous les kangourous sombres. Quel est le nombre de kangourous clairs ?
A) 1000 B) 1001 C) 1002 D) 1003 E) cette situation est impossible

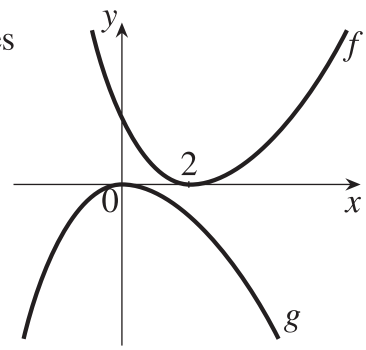
14 On considère un triangle équilatéral de côté 3 et on fait chevaucher sur ce triangle un cercle de rayon 1, centré au centre du triangle.
Quel est le périmètre de la figure obtenue ?



A) $3+2\pi$ B) $6+\pi$ C) $9+\frac{\pi}{3}$
D) 3π E) $9+\pi$

15 Une île est peuplée de « sages » qui disent toujours la vérité et de « menteurs » qui mentent tout le temps. 25 habitants de cette île forment une queue et chaque personne de cette queue, hormis la première, affirme que la personne, devant elle dans la queue, est un menteur. La première personne de la queue, elle, affirme que toutes les personnes derrière elle dans la queue sont des menteurs. Combien de menteurs figurent dans cette queue ?
A) 0 B) 12 C) 13 D) 24 E) il est impossible de le déterminer

16 f et g sont deux fonctions réelles dont les représentations graphiques sont données ci-contre. Quelle égalité peut relier f et g ?

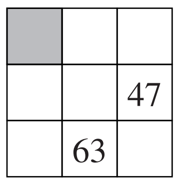


A) $g(x) = f(x+2)$
B) $g(x-2) = -f(x)$
C) $g(x) = -f(-x+2)$
D) $g(-x) = f(-x+2)$
E) $g(2-x) = -f(x)$

17 Quel est le dernier chiffre de la somme $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots\ldots - 2008^2 + 2009^2$?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18 Cent étudiants participent à une *Olympiade de Mathématiques*. Les quatre mêmes problèmes sont proposés à chaque participant et 90 d'entre eux résolvent le premier, 85 le deuxième, 80 le troisième et 70 le quatrième. Quel est le plus petit nombre possible de participants qui ont résolu les quatre problèmes ?
A) 10 B) 15 C) 25 D) 30 E) 70

19 Un carré 3×3 est divisé en 9 carrés 1×1. On souhaite écrire, dans chacun de ces 9 carrés, un nombre de telle sorte que la somme des nombres dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chaque diagonale du grand carré soit la même. Deux nombres sont sur la figure. Quel nombre doit-on écrire dans le carré grisé ?

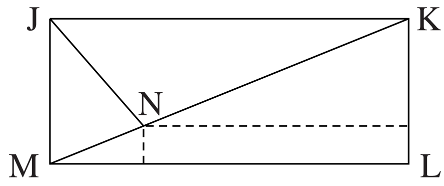


A) 16 B) 51 C) 55 D) 110 E) c'est impossible à déterminer

20 Combien y a-t-il de nombres à dix chiffres, uniquement constitués de 1, 2 ou 3, et tels que deux chiffres quelconques qui sont côte à côte diffèrent de 1 ?
A) 16 B) 32 C) 64 D) 80 E) 100

21 a, b et c sont des réels. Si $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$; combien a-t-on de valeurs possibles de k ?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

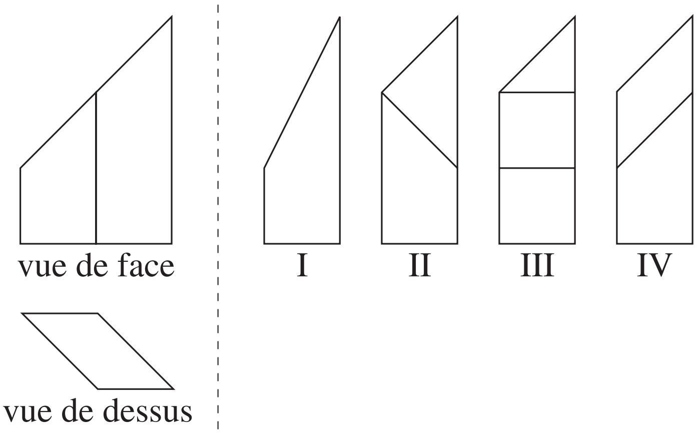
22 Dans le rectangle JKLM, la bissectrice de l'angle $\widehat{KJM}$ coupe la diagonale [KM] en N. Les distances du point N aux côtés [LM] et [KL] sont respectivement 1 et 8. Quelle est alors la longueur LM ?



A) $8+2\sqrt{2}$ B) $11-\sqrt{2}$ C) 10 D) $8+3\sqrt{2}$ E) $11+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

23 Les figures ci-contre représentent un solide vu de face et vu de dessus. Parmi les quatre figures proposées, laquelle peut représenter ce solide vu de la gauche ?

A) la figure I
B) la figure II
C) la figure III
D) la figure IV
E) aucune des 4 figures proposées



24 Léa et ses trois sœurs prennent l'avion : elles ont des billets pour une rangée de quatre sièges. Léa et deux de ses sœurs s'installent chacune dans un des quatre sièges au hasard. Marie arrive peu après et constate que son siège est occupé par une de ses sœurs ; elle exige de s'y asseoir. Alors chaque sœur qui est amenée à se lever décide de prendre elle aussi le siège qui lui avait été attribué. Quelle est la probabilité que Léa ait à se lever ?

A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{2}{3}$

Pour départager d'éventuels premiers ex æquo, le Kangourou pose deux questions subsidiaires.

25 n est un entier supérieur ou égal à 3. Pour combien de valeurs de n peut-on construire un polygone convexe (sans angle plat) à n côtés dont les angles sont dans les rapports 1, 2, …, n ?

26 La suite d'entiers (a_n) est définie par $a_0=1,\ a_1=2$ et : $\forall n \geqslant 0,\ a_{n+2}=a_n+(a_{n+1})^2$.
Quel est le reste de la division euclidienne de a_{2009} par 7 ?