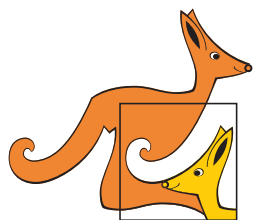


KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES



L'association *Kangourou Sans Frontières* organise le jeu-concours *Kangourou* pour plus de quatre millions de participants dans le monde.

Mars 2008 — Durée : 50 minutes

Épreuve Étudiants, sujet S

- L'épreuve est individuelle. **Les calculatrices sont interdites.**
 - **Il y a une seule bonne réponse par question.** Les bonnes réponses rapportent 3, 4 ou 5 points selon leur difficulté (premier, deuxième et troisième tiers de ce questionnaire), mais une réponse erronée coûte un quart de sa valeur en points. Si aucune réponse n'est donnée, la question rapporte 0 point.
 - Il y a deux manières de gagner des prix : « crack » (au total des points) et « prudent » (au nombre de réponses justes consécutives depuis la première question).
- Les classements sont séparés pour les Terminale S et pour les étudiants (Bac+).**

1 Si $x + y = 0$ et si $x \neq 0$ alors $\frac{x^{2008}}{y^{2008}} =$

A) -1

B) 0

C) 1

D) 2^{2008}

E) $\frac{x}{y}$

2 Un tableau est formé de 33 lignes numérotées de 1 à 33 et de 21 colonnes numérotées de 1 à 21. On supprime les lignes dont le numéro n n'est pas un multiple de 3 et les colonnes dont le numéro est pair. Combien de cases reste-t-il ?

A) 110

B) 121

C) 115,5

D) 119

E) 242

3 La figure montre un cercle de diamètre $[MN]$ et son point d'intersection H avec l'axe des ordonnées.

Quelle est la valeur de h ?

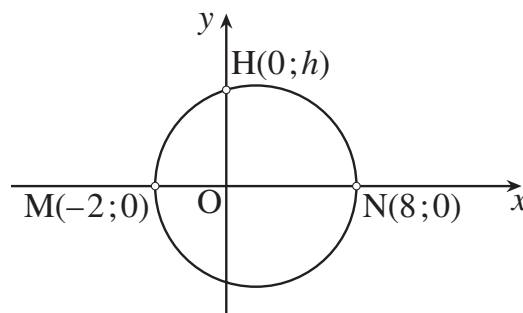
A) 3

B) $2\sqrt{3}$

C) 4

D) 5

E) 6



4 Une rivière passe au point A et s'écoule. Ultérieurement, elle se scinde en deux bras, le premier bras reçoit $\frac{2}{3}$ de l'eau de cette rivière et le second bras le reste. Plus loin, le premier bras se scinde lui-même en trois branches, la première de ces branches reçoit $\frac{1}{8}$ de l'eau du bras, la seconde branche $\frac{5}{8}$ et la troisième branche le reste. Encore plus loin, cette dernière branche se jette dans le second bras de la rivière (la carte ci-dessus montre la situation). Quelle proportion de l'eau passant en A s'écoule au point B ?

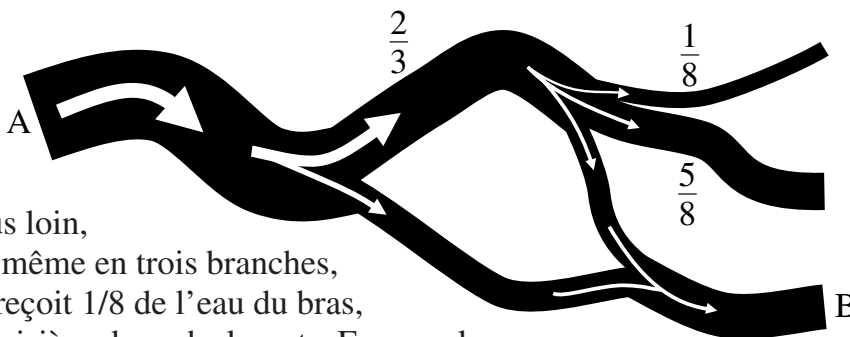
A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{5}{4}$

C) $\frac{2}{9}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1}{4}$



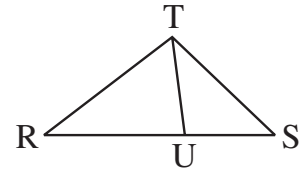
- 5** Quatre nombres, dont les nombres 3 et 4, sont inscrits dans les cases du tableau 2×2 ci-contre. Le somme des nombres de la première ligne est 5 et de la deuxième ligne 10. La somme des nombres de la première colonne est 9. Le plus grand nombre inscrit dans le tableau est :

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) impossible à déterminer

- 6** RST est un triangle et U un point du segment [RS] tel que $RU = RT$ et $US = UT$.

Si, de plus, $TR = TS$, quelle est la valeur de l'angle \widehat{RTS} ?

A) 98° B) 100° C) 104°
D) 108° E) 110°



- 7** Sur une droite, on place dans cet ordre cinq points distincts A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 (les distances entre ces points sont quelconques). On prend un point P de cette droite tel que la somme des distances $PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 + PA_5$ soit la plus petite possible. Alors le point P est :

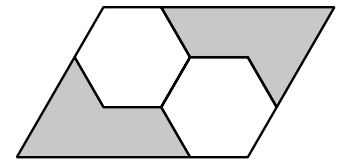
A) A_1 B) A_2 C) A_3
D) n'importe quel point entre A_2 et A_4 E) n'importe quel point entre A_1 et A_5

- 8** Stella souhaite remplacer les deux étoiles dans $2\star\star 8$ par deux chiffres afin d'obtenir un nombre divisible par 3. Combien de possibilités a-t-elle ?

A) 29 B) 30 C) 19 D) 20 E) 33

- 9** Les deux hexagones de cette figure sont réguliers. Quelle fraction de l'aire du parallélogramme est grisée ?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{12}$



- 10** Si x, y, z , sont trois réels vérifiant $x + y + z = 1$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, quelle est la valeur de $x^2 + y^2 + z^2$?

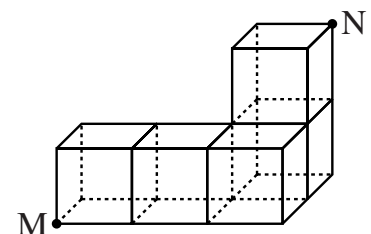
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) on ne peut pas savoir

- 11** Une boîte contient sept cartes. Chacun des nombres de 1 à 7 est écrit sur une carte (un seul nombre sur chaque carte). Le kangourou prend au hasard 3 cartes dans la boîte ; puis le singe en prend 2 et il en reste donc 2 dans la boîte. Alors le kangourou regarde ses cartes et, sûr de lui, dit au singe : « Je sais que la somme des nombres écrits sur tes cartes est un nombre pair. » Quelle est donc la somme des nombres écrits sur les cartes prises par le kangourou ?

A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

- 12** Chaque cube de la figure a pour côté 1. Quelle est la longueur du segment [MN] ?

A) $\sqrt{17}$ B) 7 C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{14}$

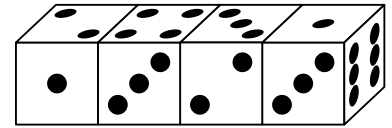


- 13** On considère les sept nombres entiers : $-9, 0, -5, 5, -4, -1$ et -3 . On en choisit six afin de pouvoir les regrouper en trois paires de même somme. Quel nombre ne faut-il pas prendre ?
 A) 5 B) 0 C) -3 D) -4 E) -5

- 14** Trois réels x, y et z vérifient $x^2yz^3 = 7^3$ et $xy^2 = 7^9$. Alors xyz vaut :
 A) 7^4 B) 7^6 C) 7^8 D) 7^9 E) 7^{10}

- 15** Cinq problèmes sont proposés lors d'une compétition mathématique. Les problèmes étant de différentes difficultés, les points accordés pour chacun d'eux sont des entiers différents. Bill a résolu les cinq problèmes ; il a obtenu 10 points avec les deux donnant le moins de points et 18 points avec les deux donnant le plus de points. Quelle est sa note globale ?
 A) 30 B) 32 C) 34 D) 35 E) 40

- 16** Quatre dés identiques sont alignés comme sur la figure. Chaque dé a ses faces marquées de 1, 2, 3, 4, 5 et 6 points, mais n'est pas un dé standard : la somme des points de deux faces opposées n'est pas forcément égale à 7.



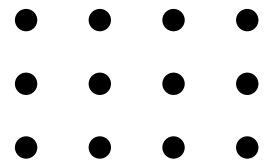
- Quelle est la somme des points figurant sur les six faces de contact entre ces quatre dés ?
 A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

- 17** Parmi les diviseurs du nombre $3^{16} - 1$, il y en a exactement deux strictement compris entre 75 et 85. Quel est le produit de ces deux diviseurs ?
 A) 5852 B) 6560 C) 6804 D) 6888 E) 6972

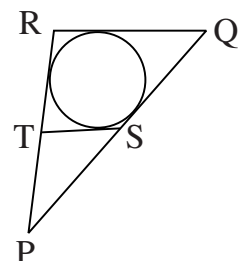
- 18** Les longueurs des arêtes d'un parallélépipède rectangle, exprimées en centimètres, sont des entiers formant une progression géométrique de rapport 2. Parmi les volumes suivants, lequel peut être celui de ce parallélépipède ?
 A) 120 cm^3 B) 188 cm^3 C) 216 cm^3 D) 350 cm^3 E) 500 cm^3

- 19** Trois points distincts sont pris au hasard parmi les points de la grille ci-contre. Quelle est la probabilité d'avoir trois points alignés ?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{12}$

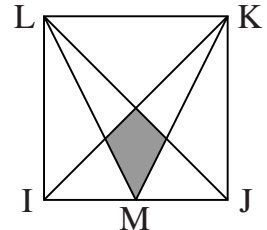


- 20** PQR est un triangle dont les longueurs des côtés, PR, PQ et QR, sont respectivement 5, 6 et 3. T et S sont deux points, respectivement pris sur les segments [PR] et [PQ], tels que la droite (TS) soit tangente au cercle inscrit dans le triangle PQR. Le périmètre du triangle PST est :
 A) 7 B) 4 C) 9
 D) 6 E) 8



- 21** Le numérateur d'une fraction est strictement négatif et égal au dénominateur augmenté de un. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?
- A) « La fraction est strictement inférieure à -1 . »
 - B) « La fraction est strictement comprise entre -1 et 0 . »
 - C) « La fraction est strictement comprise entre 0 et 1 . »
 - D) « La fraction est strictement supérieure à 1 . »
 - E) « On ne peut pas savoir si la fraction est strictement positive ou strictement négative. »

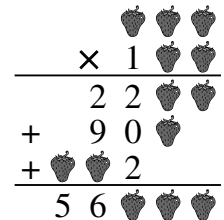
- 22** Le carré IJKL a pour côté 1 et M est le milieu de [IJ]. L'aire de la région en gris est :



- A) $\frac{1}{24}$
- B) $\frac{1}{16}$
- C) $\frac{1}{8}$
- D) $\frac{1}{12}$
- E) $\frac{2}{13}$

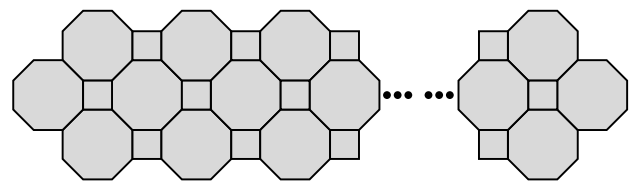
- 23** Mathilde a dessiné 36 kangourous en utilisant trois crayons de couleur. 25 kangourous contiennent du jaune, 28 du brun et 20 du noir ; il n'y a que 5 kangourous qui contiennent les trois couleurs. Combien de kangourous unicolores Mathilde a-t-elle dessinés ?
- A) aucun
 - B) 4
 - C) 12
 - D) 31
 - E) on ne peut pas savoir

- 24** Sur la figure, chaque fraise a pris la place d'un chiffre. Quelle est la somme des chiffres du résultat de cette multiplication ?
- A) 16
 - B) 20
 - C) 26
 - D) 30
 - E) un autre nombre



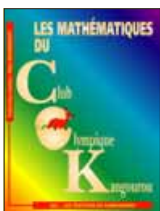
Pour départager d'éventuels premiers ex æquo, le Kangourou pose deux questions subsidiaires.

- 25** Combien y a-t-il d'entiers positifs de 2008 chiffres tels que chaque nombre formé de deux consécutifs de ses chiffres soit divisible par 17 ou par 23 ?
- 26** Les côtés des octogones réguliers et des carrés de ce beau vitrail sont des segments de plomb. Le vitrail contient 61 octogones. Combien de boîtes de 60 segments de plomb a-t-on dû acheter ?



© Art Culture Lecture-les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 4 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé.
« Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »



Librairie du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet :
<http://www.mathkang.org/catalogue/>

