

KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris (ouvert au public)

Tél. : 01 43 31 40 30

www.mathkang.org

Le jeu-concours Kangourou, créé en 1991, a lieu tous les ans au mois de mars. 5 millions de jeunes y participent maintenant et réfléchissent aux questions élaborées par des professeurs d'une quarantaine de pays. C'est l'événement phare du Kangourou des mathématiques qui œuvre pour une large diffusion de la culture, en particulier avec la distribution massive de livres, brochures, outils, jeux, cédéroms pour voir, lire, faire et apprendre, agréablement, des mathématiques.

Kangourou 2008 - Corrigé de l'épreuve Étudiants

1. Réponse C. $y = -x$ donc $\frac{x^{2008}}{y^{2008}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{2008} = (-1)^{2008} = 1$.

2. Réponse B. Les lignes conservées sont donc celles numérotées 3, 6, ..., 33 à savoir 11 lignes et les colonnes conservées sont celles numérotées 1, 3, ..., 21 à savoir 11 colonnes. Le tableau restant a donc 121 cases.

3. Réponse C. Le centre du cercle S a pour abscisse 3 et le rayon du cercle est 5. Par Pythagore : $h^2 = OH^2 = SH^2 - SO^2 = 25 - 9 = 16$. $h = 4$.

4. Réponse D. Le point B reçoit $\frac{1}{3} + \frac{2}{8} \times \frac{2}{3}$ de l'eau passant en A, soit la moitié de l'eau passant en A.

5. Réponse B. 3 et 4, dont la somme est 7, ne sont pas dans la même ligne. Comme la somme des nombres d'une des colonnes est 9, la somme des nombres de l'autre est $15 - 9 = 6$; et 3 et 4 ne sont donc pas non plus dans la même colonne.

Pour que la première colonne ait pour somme 9, on peut y mettre soit 4 et 5 (mais alors une ligne aurait 3 et 5 de somme 8), soit 3 et 6 : cette dernière possibilité est la bonne (voir tableau ci-contre). Réponse : 6.

3	2
6	4

6. Réponse D. On appelle x la mesure de \widehat{RTU} et y celle de \widehat{UTS} .

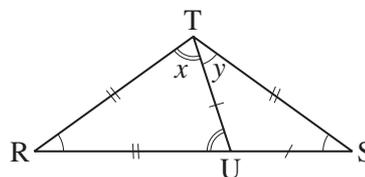
Alors $\widehat{RTS} = x + y$.

Dans RTU isocèle, on a :

$\widehat{RUT} = \widehat{RTU} = x$. On a aussi :

$\widehat{RUT} = 180^\circ - \widehat{TUS} = 2\widehat{UTS} = 2y$ (UTS est isocèle). Donc $x = 2y$.

Dans TRS, on a $180^\circ = x + 3y = 5y$. D'où $y = 36^\circ$, $x = 72^\circ$ et la valeur cherchée est : 108° .



Kangourou 2008 - Corrigé de l'épreuve Étudiants

7. Réponse C. On note $S = PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 + PA_5$.
- Si P est à gauche de A_1 alors $S \geq A_1A_2 + A_1A_3 + A_1A_4 + A_1A_5$.
(Raisonnement analogue si P est à droite de A_5 .)

- Si P est entre A_1 et A_2 alors :
 $S \geq A_2A_1 + A_2A_3 + A_2A_4 + A_2A_5$ ($PA_1 + PA_2 = A_1A_2$).
(Raisonnement analogue si P est entre A_5 et A_4 .)

- Si P est entre A_2 et A_3 alors :
 $S = PA_1 + PA_2 + PA_3 + (PA_3 + A_3A_4) + (PA_3 + A_3A_5)$
 $= A_3A_1 + A_3A_2 + A_3A_4 + A_3A_5 + PA_3$.
(Raisonnement analogue si P est entre A_4 et A_3 .)

La plus petite valeur de S est donc $A_3A_1 + A_3A_2 + A_3A_4 + A_3A_5$ obtenue uniquement en A_3 .

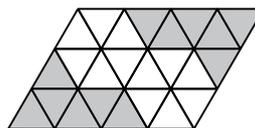
8. Réponse E. Comme $8 + 2 = 10$ et comme la somme de deux chiffres est comprise entre 0 et 18, la somme des deux chiffres manquants doit être : 2, 5, 8, 11, 14 ou 17.

On obtient ainsi :

$3 + 6 + 9 + 8 + 5 + 2$, soit 33 possibilités.

(Attention, à partir de 11, il faut tenir compte du fait qu'un chiffre ne dépasse pas 9.)

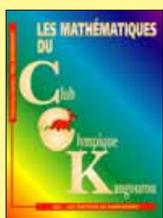
9. Réponse A. En faisant passer par les sommets des hexagones, comme sur le dessin ci-contre, les parallèles aux côtés du parallélogramme, on constate que cette fraction est $\frac{1}{2}$.



10. Réponse B. Par $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, on a $xy + yz + zx = 0$.

Comme $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$ la valeur cherchée est 1.

11. Réponse B. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair. Si le kangourou est sûr que la somme des nombres écrits sur les deux cartes du singe est un nombre pair c'est qu'il est sûr, qu'après avoir pris ses 3 cartes, les 4 cartes qui restaient étaient soit toutes paires soit toutes impaires. Comme parmi les nombres de 1 à 7, il y a trois nombres pairs (2, 4 et 6) et 4 nombres impairs (1, 3, 5 et 7), c'est que le kangourou a pris les trois cartes portant les nombres pairs. $2 + 4 + 6 = 12$; la somme cherchée est 12.



Librairie du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois, Paris 5^e

Le catalogue des ÉDITIONS DU KANGOUROU sur Internet :

<http://www.mathkang.org/catalogue/>



12. Réponse A. Il faut tout d'abord calculer le carré de la longueur de la projection de MN sur le plan qui soutient les cubes. Il s'agit, par Pythagore, de $9 + 4 = 13$.

Ensuite, encore par Pythagore : $MN^2 = 13 + 4 = 17$.

$$MN = \sqrt{17}.$$

13. Réponse E. La somme des six entiers choisis est un entier divisible par 3. Or les sommes obtenues en ne prenant pas, respectivement, $-9, 0, -5, 5, -4, -1, -3$, sont nécessairement $-8, -17, -12, -22, -13, -16, -14$. Le seul multiple de 3 est -12 .

L'entier que l'on ne prend pas est donc -5 et on a les groupements $\{-9; 5\}$, $\{0; -4\}$ et $\{-1; -3\}$ de somme -4 .

14. Réponse A. En multipliant membre à membre les deux égalités données, on a : $x^3y^3z^3 = 7^{12}$. Donc $xyz = 7^4$.

15. Réponse D. Soient $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ les points accordés pour chacun des cinq problèmes.

D'après les résultats de Bill : $x_1 + x_2 = 10$ et $x_4 + x_5 = 18$.

Comme x_1 et x_2 sont des entiers, avec $x_1 < x_2$ et $x_1 + x_2 = 10$ on a :

$$x_1 \leq 4 \text{ et } x_2 > 6.$$

Comme x_4 et x_5 sont des entiers avec $x_4 < x_5$ et $x_4 + x_5 = 18$ on a :

$$x_4 \leq 8 \text{ et } x_5 > 10.$$

Entre x_4 et x_5 doit figurer l'entier x_3 . Il n'y a donc que la possibilité $x_2 = 6 < x_3 = 7 < x_4 = 8$.

Bill a obtenu 35 points.

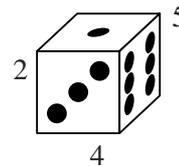
16. Réponse B. Le dernier dé donne la disposition de 3 faces : 3, 1, 6.

Les deux dés du milieu montrent que les faces 2 et 4 ont chacune une arête commune avec la face 3, donc la face opposée à 3 est 5.

Et comme un dé montre que les faces 1 et 2 ont une arête commune, il ne reste que 4 pour être opposé à 1.

Les dés identiques sont donc totalement déterminés (voir figure).

Il ne reste plus qu'à compter : $5 + 1 + 4 + 6 + 2 + 2 = 20$.



17. Réponse B. $3^{16} - 1 = (3^8 + 1) \times (3^8 - 1)$.

$$3^{16} - 1 = (3^8 + 1) \times (3^4 + 1) \times (3^2 + 1) \times (3 + 1) \times (3 - 1).$$

$$3^{16} - 1 = 6562 \times 82 \times 10 \times 4 \times 2.$$

Si l'on fait confiance au texte, le produit cherché est $80 \times 82 = 6560$.

Cependant on peut s'assurer que l'affirmation de l'énoncé est vraie.

$$\text{En effet : } 3^{16} - 1 = 80 \times 82 \times 6562 = 2^6 \times 5 \times 17 \times 41 \times 193.$$

Ce qui permet de vérifier que les seuls diviseurs de $3^{16} - 1$ compris strictement entre 75 et 85 sont bien 80 et 82. On notera que 85 est diviseur.

18. Réponse C. Les côtés sont a, aq, aq^2 et le volume est $a^3q^3 = 8a^3$ (car $q=2$). a est entier, donc le volume divisé par 8 doit être le cube d'un entier.

Seul 216 a cette propriété : $\frac{216}{8} = 27 = 3^3$.

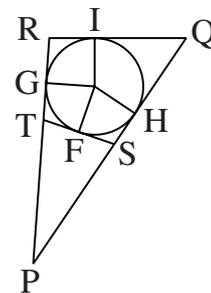
19. Réponse B. Le nombre de choix de ces trois points est $\binom{12}{3} = 220$.

Le nombre de triplets constitués de points alignés est :

4 triplets diagonaux, 4 triplets verticaux, 12 triplets horizontaux (3×4), soit 20 triplets.

La probabilité est : $\frac{1}{11}$.

20. Réponse E. Soient F, G, H et I les points de tangence (voir figure). Ainsi : $TF = TG$, $SF = SH$, $GR = RI$ et $HQ = QI$. On déduit des deux premières égalités que le périmètre du triangle PST est $PG + PH$. On a : $PG + GR = 5$, $PH + HQ = 6$ et $GR + HQ = RI + QI = 3$. D'où $PG + PH = 5 + 6 - 3 = 8$. Le périmètre de PST est 8.



21. Réponse C. Cette fraction est $r = \frac{a}{b}$.

$$a = b + 1 \text{ donc } r = 1 + \frac{1}{b}$$

$$a < 0 \text{ donc } b < -1 \text{ et } \frac{1}{b} > -1.$$

$$\text{En outre } b < 0 \text{ donc } -1 < \frac{1}{b} < 0.$$

Et $0 < r < 1$.

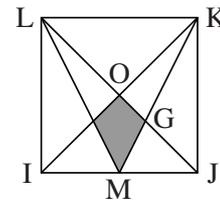
22. Réponse D. Soit O le centre du carré et G le centre de gravité du triangle IJK. L'aire grisée vaut $\text{Aire}(\text{OIJ}) - 2 \times \text{Aire}(\text{GMJ})$.

$$\text{Aire}(\text{OIJ}) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Aire}(\text{GMJ}) = \frac{1}{6} \text{Aire}(\text{IJK}) = \frac{1}{12}$$

(aire délimitée par les 3 médianes et le côté d'un triangle).

$$\text{Et } \frac{1}{4} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}.$$



23. Réponse B. Soit x le nombre de kangourous que Mathilde a dessinés avec une seule couleur. On a 5 kangourous avec trois couleurs et donc $36 - 5 - x$ kangourous avec deux couleurs.

En comptant, de deux manières, le nombre de couleurs, on a :

$$x + 2(31 - x) + 3 \times 5 = 25 + 28 + 20 = 73. \text{ Et } x = 4.$$

24. Réponse A. La multiplication par 1 montre que $\# = 2$
 $2 + 0 + 2$ (avec au plus 1 de retenue) ne donne pas de retenue ; donc $2 + 9 + \& = 16$ et $\& = 5$, $@ = 4$.
 On connaît donc le premier nombre : 452.
 On trouve alors $2 \times 452 = 904$ et $5 \times 452 = 2260$.
 La multiplication est 452×125 et le résultat cherché est 16.

$$\begin{array}{r}
 \cdot \cdot \# \\
 \times 1 \cdot \cdot \\
 \hline
 2 2 \cdot \cdot \\
 + 9 0 \cdot \\
 + @ \& 2 \\
 \hline
 5 6 \cdot \cdot \cdot
 \end{array}$$

25. Réponse 9.

On forme la liste des multiples de 17 et de 23 comportant deux chiffres. Il s'agit de : 00 17 34 51 68 85 et 00 23 46 69 92. Il apparaît, en ne comptant 00 qu'une fois, 10 derniers chiffres qui sont les chiffres 0, 1, ..., 9. Et connaissant le chiffre des dizaines, on connaît le chiffre des unités (et inversement). Le nombre de 2008 chiffres est donc entièrement déterminé par son dernier chiffre. Or : 0 conduit à 0 itéré 2007 fois et n'est pas une écriture décimale d'un entier. Par contre tout $x \in \{1, \dots, 9\}$ conduit à une et une seule écriture décimale vérifiant la propriété. Il y a donc 9 nombres ayant la propriété voulue.

26. Réponse 8.

On peut construire tout d'abord les 61 octogones et les assembler entre eux. On utilise pour cela :
 61×8 morceaux moins ceux qui appartiennent à deux octogones à savoir, pour les 21 octogones de la rangée du centre : les deux extrémités ont deux côtés communs avec les autres et les 19 intermédiaires en ont quatre ; donc $61 \times 8 - 2 \times 2 - 19 \times 4 = 408$ morceaux. À ce stade tout est en place, excepté les morceaux fermant les carrés du haut et du bas à savoir 38 morceaux.
 On utilise finalement 446 morceaux de tiges.
 Il faut donc 8 boîtes ($8 \times 60 = 480$ et $7 \times 60 = 420$).

© Art Culture Lecture - les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris

À partir de ce document de 5 pages, n'est autorisée qu'une impression unique et réservée à un usage privé. « Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite. »