GEOMETRIE

THÈME 20 **Représentation en perspective cavalière et en vraie grandeur**

Voici la première partie d'un sujet du concours général de Mathématiques en 1876, avec la solution de Henri BERGSON, philosophe français, qui obtint le premier prix à ce concours :

Concours Général de 1876.

Philosophie.

Solution de M. Henri Bergson, élève du Lycée Fontanes, lauréat du Concours (1er Prix).

N° 155. Dans un cube dont l'arête est a, on mène une diagonale AA', puis on coupe le solide par un plan mené perpendiculairement à la diagonale et à une distance d du sommet A.

1° On demande la figure de la section qui correspond aux diverses valeurs de d ;

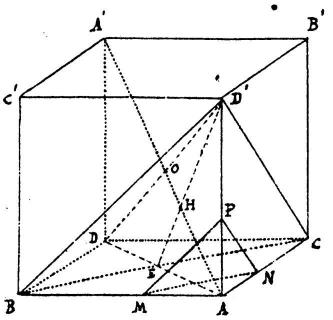
2° On demande l'aire de la section et les limites entre lesquelles elle varie lorsque le plan sécant se déplace.

I.

Tirons les trois droites $D'B$, $D'C$, BC. Je dis que le plan $D'BC$ est l'un des plans considérés, c'est-à-dire est perpendiculaire à AA'.

En effet, la projection AD de la droite AA' étant perpendiculaire à BC, la droite AA' elle-même est orthogonale à BC, en vertu du théorème des trois perpendiculaires. On démontrerait de même que AA' est orthogonale à BD' ou à CD'. La droite AA', étant alors orthogonale à deux droites du plan BCD' est perpendiculaire à ce plan.

Cela posé, soit H le point où AA' coupe le plan BCD'. Je dis que HA est égal à la moitié de HA'.



En effet, tirons les droites $D'D$, $D'E$. La ligne AA' rencontre évidemment $D'E$, car ces deux droites sont situées dans un même plan déterminé par les parallèles AD', $A'D$. Mais la droite $D'E$, contenue dans le plan BCD', ne peut rencontrer AA' qu'à la condition de passer par le point H où AA' coupe le plan. Dès lors, dans le triangle ADD' les droites AO, $D'E$ étant deux médianes, on a $AH = \frac{2}{3} AO = \frac{1}{3} AA' = \frac{1}{2} HA'$. Le point H partage donc bien AA' en deux parties dont l'une est moitié de l'autre.

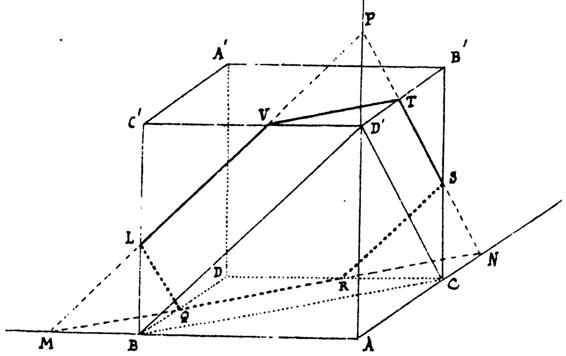
Il est maintenant facile d'étudier comment varie la forme de la section. Le côté du cube étant désigné par a, sa diagonale est égale à $a\sqrt{3}$.

1° Supposons d'abord que le point de la diagonale par lequel on élève le plan perpendiculaire soit situé entre le point A et le point H, c'est-à-dire que l'on ait $d < \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Soit MNP la section ainsi déterminée. Le plan MNP, perpendiculaire à AA', est parallèle au plan BCD'.

Par conséquent dans le tétraèdre $ABCD'$ le plan MNP est un plan mené parallèlement à la base BCD'. Donc, en vertu d'un théorème connu, la section MNP est un polygone semblable à celui de la base, c'est-à-dire un triangle équilatéral.

Ainsi, quand on a $d < \frac{a\sqrt{3}}{3}$, la section est un triangle équilatéral.

2° — Supposons maintenant que le point par lequel on élève le plan perpendiculaire soit situé entre le point H et le point O. Je dis que la section est un hexagone (figure 2)



En effet, si l'on suppose prolongées les faces du trièdre A, le plan perpendiculaire, en les rencontrant, détermine une section MNP qui est, comme précédemment, un triangle équilatéral. Mais ce triangle équilatéral est maintenant coupé suivant les droites LQ, RS, VT, par trois faces du cube. La section est donc un hexagone. Reste à déterminer la forme particulière de cet hexagone. D'abord, il est évident que les triangles VPT, LQM, RSN sont équilatéraux. En effet, considérons VPT par exemple : les droites VT, MN, intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles ; le triangle VPT est donc semblable à MNP, et par suite équilatéral. — De plus, il est facile de voir que ces trois triangles équilatéraux sont égaux. Comparons en effet LQM et RSN, par exemple. On a

$$\frac{RN}{RQ} = \frac{RC}{RD} = \frac{QB}{QD} = \frac{QM}{RQ}$$

d'où $\frac{RN}{RQ} = \frac{QM}{RQ}$ ou $RN = QM$ et par suite les triangles LQM, RSN, ayant leurs côtés égaux, sont égaux.

On voit dès lors que l'hexagone $LVTSRQ$ n'est autre chose que la figure obtenue en détachant d'un triangle équilatéral trois triangles équilatéraux égaux. De là résultent diverses conséquences : 1° les angles de l'hexagone sont égaux à 120° ; 2° les côtés non consécutifs de l'hexagone sont égaux trois à trois ; 3° l'hexagone est circonscriptible. Cette dernière conséquence se démontrerait facilement.

Enfin, je dis que le périmètre de la section est constant. En effet, ce périmètre est égal à $3QR + 3RS$, ou $3(QR + RS)$, ou $3(QR + RN)$ ou enfin $3QN$. Mais si l'on remarque qu'on a $QN = BC = a\sqrt{2}$, on voit que le périmètre est égal à $3a\sqrt{2}$ et, par suite, constant.

A mesure que le plan perpendiculaire s'éloigne de sa position primitive BCD', la ligne MN s'éloigne de BC. Mais à mesure que MN s'éloigne de BC, QR diminue et RN augmente. Il arrivera donc un moment où l'on aura $QR = RN$, et par conséquent $QR = RS$. La section sera alors un hexagone régulier et les points L, Q, R, S, T, V seront les milieux des côtés du cube. Les droites VR, TQ, LS, joignant les milieux de côtés opposés du cube, passent par le centre de ce solide. Donc, quand le plan perpendiculaire est élevé au centre O du cube, la section est un hexagone régulier.

On voit donc, en résumé, que lorsque d est compris entre $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, la section est un hexagone, qui tend à devenir régulier à mesure que d augmente, et qui devient régulier pour $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Le plan perpendiculaire dépassant le point O, les mêmes circonstances se présenteront en sens inverse ; l'hexagone tendra à devenir un triangle équilatéral.

La discussion tout entière se résume donc ainsi :

Si d est inférieur à $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, la section est un triangle équilatéral ;

Si d est compris entre $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$, la section est un hexagone ;

Si d est compris entre $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ et $a\sqrt{3}$, la section
115 est encore un triangle équilatéral.

II.

1° – Supposons d'abord que l'on ait $d < \frac{a\sqrt{3}}{3}$. La section est alors un triangle équilatéral MNP (figure 1), et l'on a

$$\frac{MNP}{BCD'} = \frac{d^2}{\overline{AH}^2} = \frac{3d^2}{a^2}$$

Mais BCD' est un triangle équilatéral dont le côté est $a\sqrt{2}$ et par conséquent la surface $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. On a donc

$$\frac{2MNP}{a^2\sqrt{3}} = \frac{3d^2}{a^2} \quad \text{d'où } MNP = \frac{3d^2\sqrt{3}}{2}$$

On voit que la surface du triangle ne dépend pas du côté du cube et qu'elle est proportionnelle au carré de d.

2° – Supposons maintenant d compris entre $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. La section est alors un hexagone dont nous désignerons la surface par S. On a (figure 2)

$$S = MNP - 3RSN = \frac{\sqrt{3}}{4}(\overline{MN}^2 - 3\overline{RN}^2)$$

Calculons séparément MN et RN. On a d'abord

$$\frac{MN}{BC} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{a}$$

d'où, en remplaçant BC par $a\sqrt{2}$,

$$MN = d\sqrt{2}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \overline{MN}^2 = 6d^2$$

D'autre part, on a

$$RN = MN - MR = MN - BC = MN - a\sqrt{2} = d\sqrt{2}\sqrt{3} - a\sqrt{2}$$

d'où $\overline{RN}^2 = 6d^2 + 2a^2 - 4ad\sqrt{3}$

Substituant à MN et à RN, dans l'expression de S, les valeurs trouvées, il vient $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}(2ad\sqrt{3} - 2d^2 - a^2)$

Pour étudier les variations de S, il suffit d'étudier les variations du trinôme $-(2d^2 - 2a\sqrt{3}\,d + a^2)$

On sait que le trinôme du second degré passe par un minimum pour $x = -\frac{B}{2A}$. Donc S passera par un maximum pour $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Le maximum de S aura donc lieu quand la section passera par le centre du cube, c'est-à-dire quand l'hexagone sera régulier. Si l'on substitue à d la valeur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ dans l'expression de S, on trouve que la surface de l'hexagone est alors $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. C'est ce que l'on pouvait trouver directement en calculant la surface d'un hexagone régulier dont le côté est $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dès lors, on voit comment varie la surface

(Voir la suite page 118, colonne 1).

de la section : elle croît depuis le point A, où elle est nulle, jusqu'au point O où elle atteint son maximum $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. A partir de ce point elle décroît et reprend en ordre inverse les mêmes valeurs.

On pourrait trouver le maximum de S par d'autres méthodes. D'abord, remarquons que le maximum de S a lieu en même temps que celui de la quantité $2ad\sqrt{3} - 2d^2$, ou, en supprimant le facteur constant 2, $d(a\sqrt{3} - d)$. Or, la somme de ces deux facteurs étant constante, le maximum de leur produit a lieu quand ils sont égaux, c'est-à-dire quand on a

$$d = a\sqrt{3} - d, \quad \text{ou} \quad d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Enfin, on peut trouver directement le maximum en s'appuyant sur la remarque précédemment faite que la somme de deux côtés consécutifs est constante. Désignons par x et y les côtés QR et RS par exemple. La surface S est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}(\overline{MN}^2 - 3\overline{RN}^2)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{4}[(x+2y)^2 - 3y^2]$ ou enfin $\frac{\sqrt{3}}{4}[(x+y)^2 + 2xy]$. Or la quantité $x + y$ est constante et le produit $2xy$ sera maximum quand on aura $x = y$. Le maximum aura donc lieu lorsque l'hexagone sera régulier.

(Ont résolu la même question MM : A. Leinekugel, lycée de Douai ; L. Mercadier, lycée de Constantine ; Ch. Mirguet, collège Chaptal ; M. Rouaud, collège de Béziers)