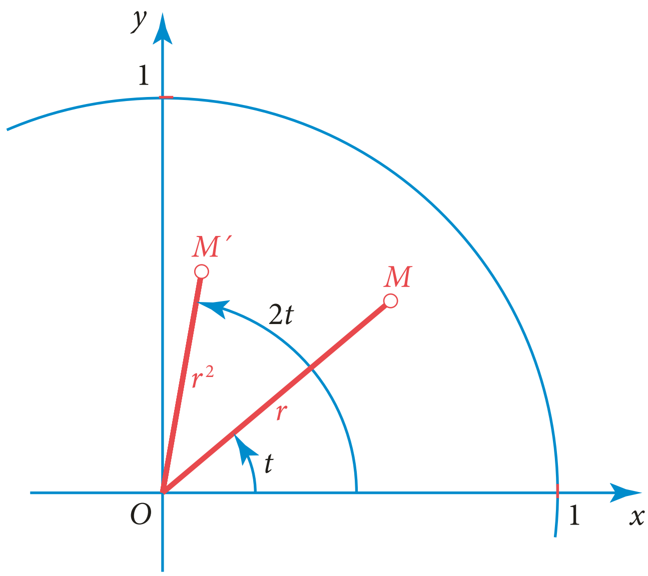
La transformation Harakiri

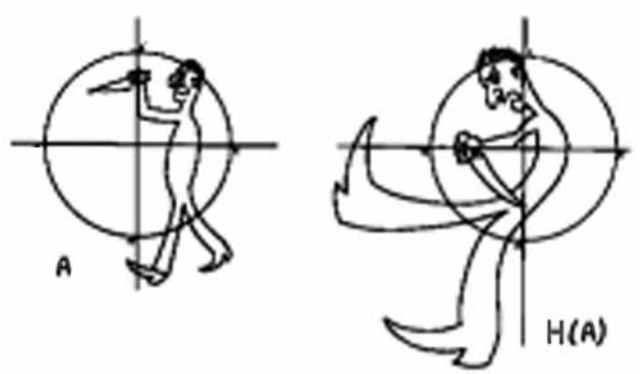
Avant de vous expliquer les nouvelles découvertes de **Pierre Fatou** (1878-1929) et **Gaston Julia** (1893-1978), il vous faut comprendre certaines choses au sujet d'une transformation géométrique notée *H*, illustrée par la figure ci-dessous.



Cette transformation fait correspondre, au point M tel que $\angle(Ox, OM) = t$ et $OM = r$, le point M' tel que $\angle(Ox, OM') = 2t$ et $OM' = r^2$.

Pour vous familiariser avec cette transformation *H*, nous vous proposons une activité qui risque de vous traumatiser, mais qui pourrait vous faire comprendre pourquoi nous appelons cette transformation *Harakiri*…

Pour information, c'est le mathématicien **Adrien Douady** (1935-2006) qui a inventé, pour ses étudiants, le dessin ci-dessous, à l'origine de cet exercice…



(Les points hors du cercle unité s'éloignent du cercle. Les points dans le cercle se rapprochent du centre.)

Défi 6.

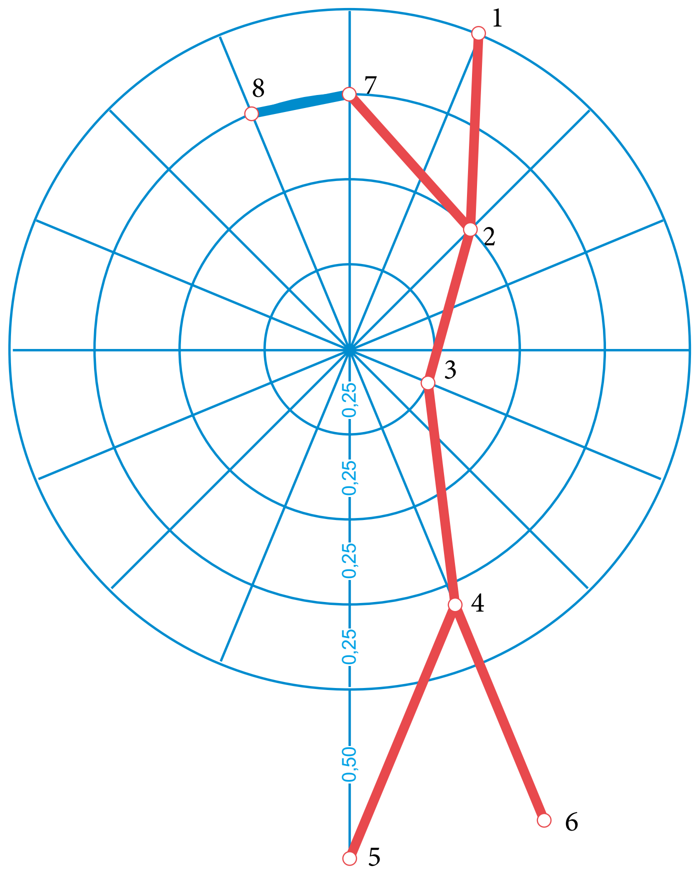
Sur la page suivante, la première figure, stylisée, représente un homme (en rouge) tenant un couteau (bleu). Sur la deuxième figure, marquez (comme nous avons marqué les points 4´, 6´ et 7´ images des points 4, 6 et 7) les transformés des cinq autres points de la première figure par la transformation H.
Vous pouvez vous aider, d'une part du tracé des quatre cercles images des quatre cercles de départ pour repérer les distances au centre, d'autre part, des diamètres des cercles pour marquer un angle double.
Tracez, transformés par H, le corps stylisé de l'homme en rouge et le couteau en bleu.

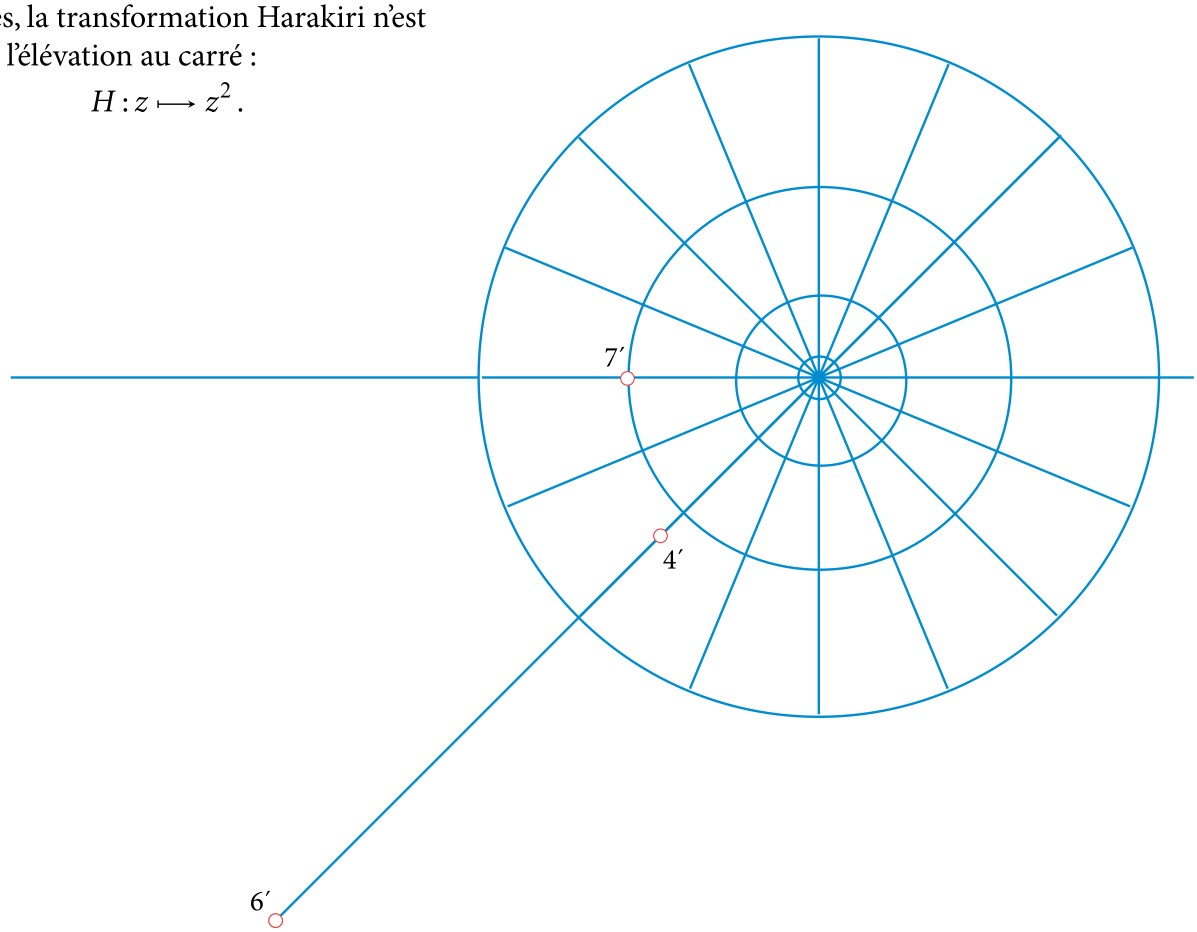
La transformation Harakiri est, en fait, très simple lorsqu'on connaît les *nombres complexes*, étudiés en Terminale. Voici en quelques mots de quoi il s'agit :
Les nombres complexes sont des nombres de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels et où i est le nombre (nouveau) dont le carré vaut – 1.
Les règles de calcul avec ces nombres sont les règles algébriques habituelles, auxquelles on a rajouté la relation $i^2 = -1$.
Le nombre $a + bi$ est naturellement associé au point d'un plan repéré, de coordonnées $(a\,;b)$, et on a la très jolie circonstance suivante :
Si r et t sont les « coordonnées polaires » d'un point de coordonnées $(a\,;b)$

(on a alors $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\tan t = \dfrac{b}{a}$ si $a \neq 0$),

alors le point associé au résultat de la multiplication des deux nombres complexes $[r\,, t]$ et $[r', t']$ est le point $[r \times r', t + t']$.
De sorte que, dans le plan des nombres complexes, la transformation Harakiri n'est autre que l'élévation au carré :

$$H : z \longmapsto z^2 .$$





Les ensembles de Julia

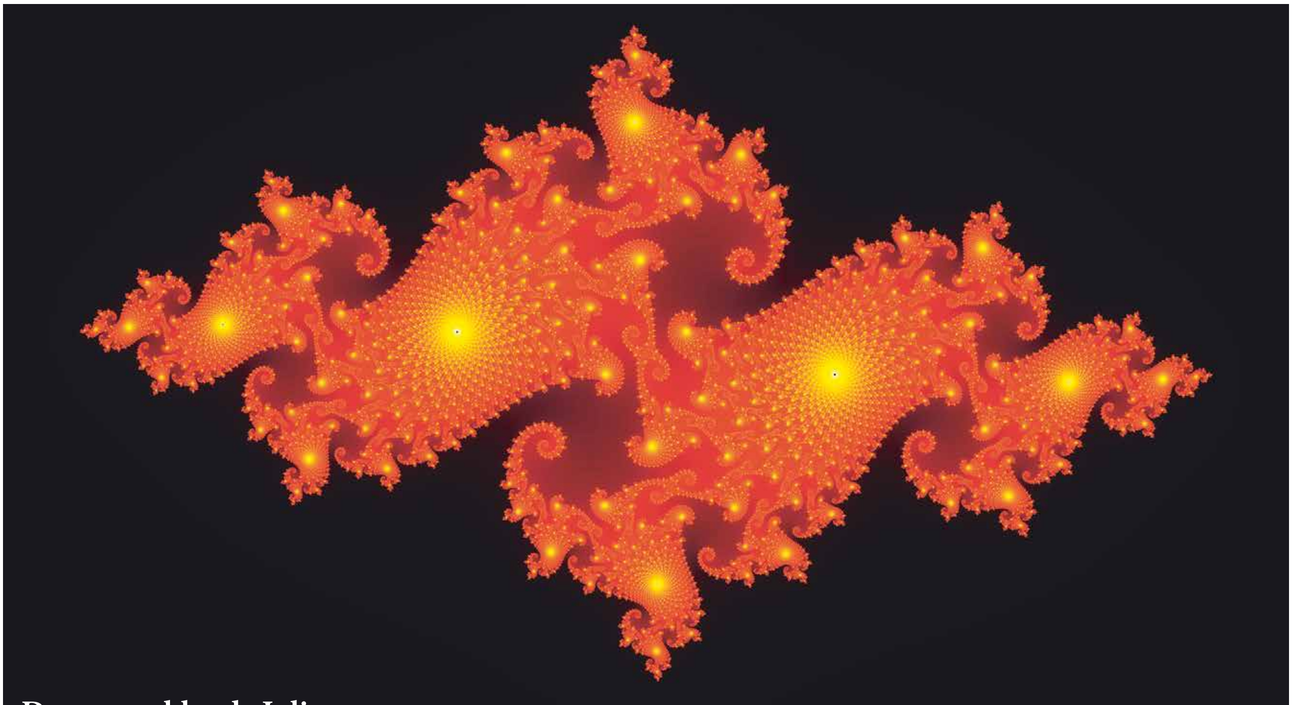
Revenons aux transformations géométriques étudiées par Fatou et Julia.

Précisément, Julia s'intéresse aux transformations géométriques dont la notation, en termes de nombres complexes s'écrit $J_c(z) = z^2 + c$ (où c est un nombre complexe donné).

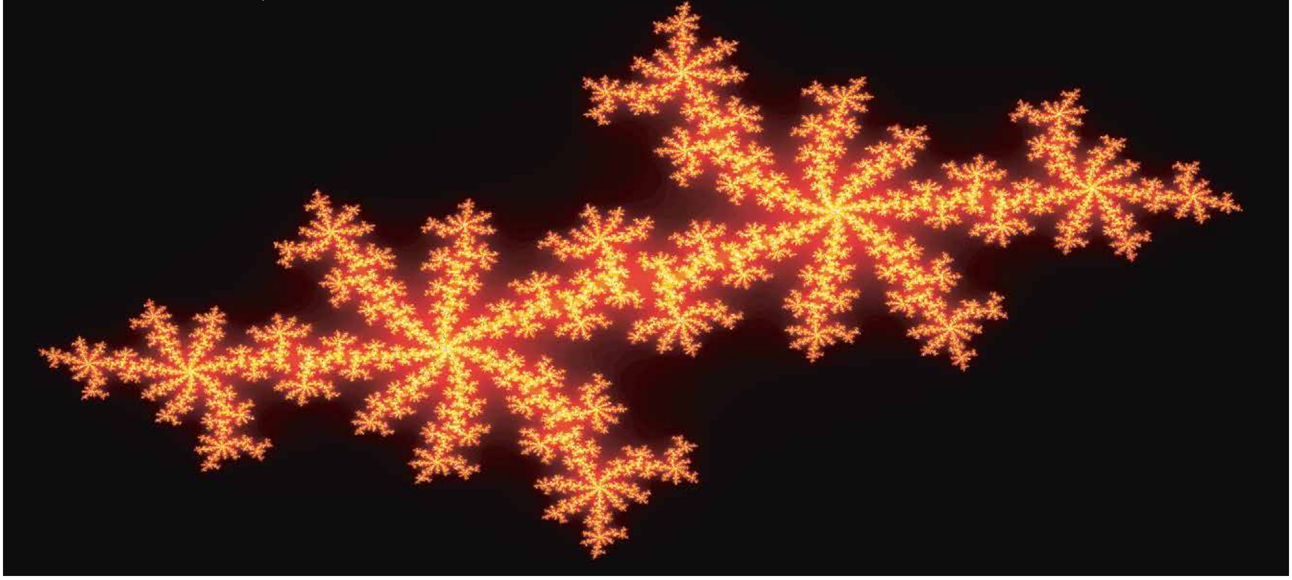
À partir d'un point z_0, il obtient une suite de points définie par $z_{n+1} = z_n{}^2 + c$, chaque point de la suite étant le transformé, par J_c, du précédent. Les points du plan complexe se partagent en deux classes : les points z_0 qui sont les premiers d'une suite bornée* et les points z_0 qui sont les premiers d'une suite qui n'est pas bornée. L'ensemble des points-frontière entre ces deux ensembles est l'*ensemble de Julia* associé à la fonction J_c. Les ensembles de Julia sont des ensembles fractals très spectaculaires et ressemblent à de la « poussière de Cantor à deux dimensions ».

Ces deux pages en montrent quelques-uns, où les couleurs sont différentes selon la vitesse de divergence des suites de points initiées par z_0.

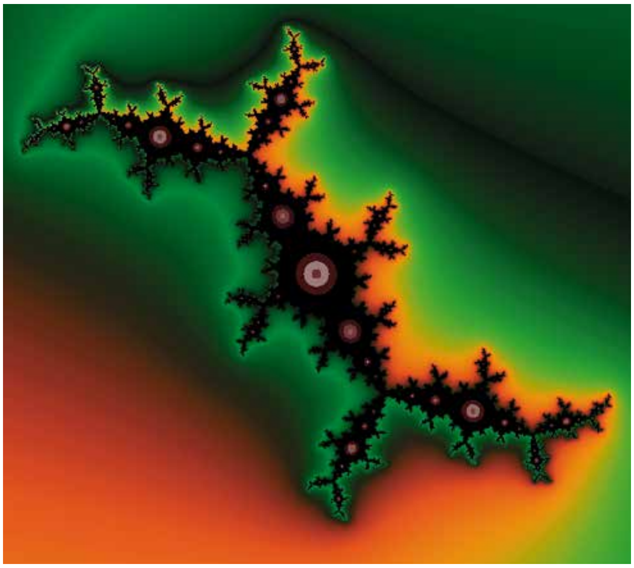
* Une suite bornée est une suite dont les termes restent à une certaine distance de l'origine.



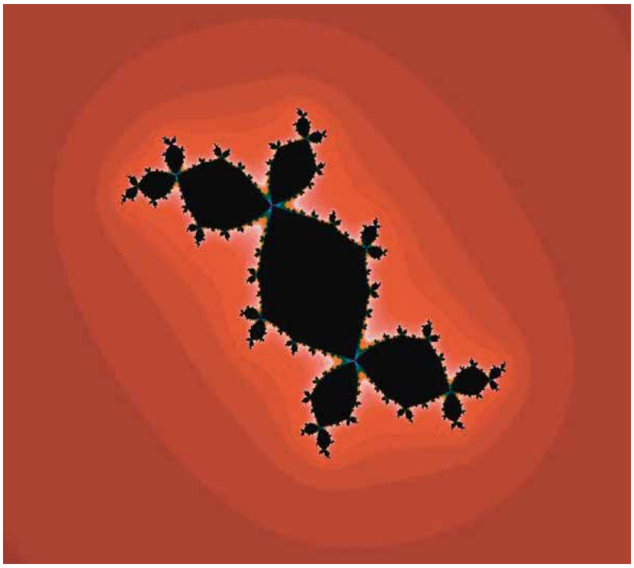
Des ensembles de Julia



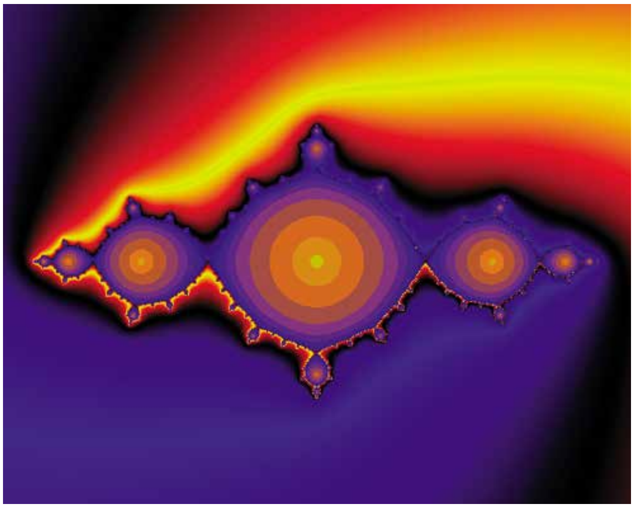
Ensemble de Julia, $c = -0{,}1134 + 0{,}8606\,i$



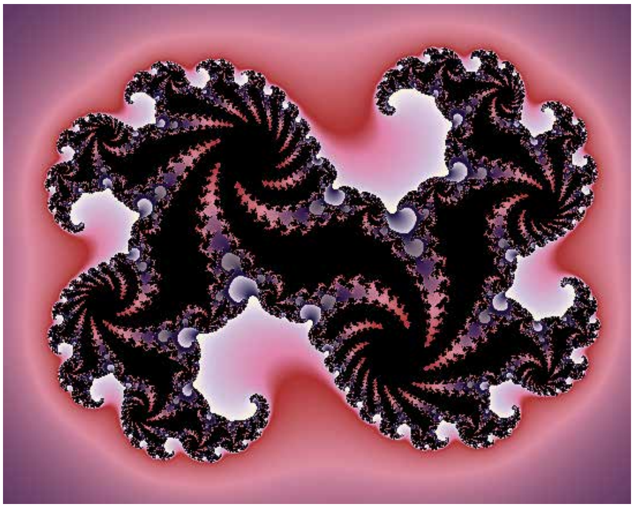
Lapin de Douady, $c = -0{,}123 + 0{,}745\,i$



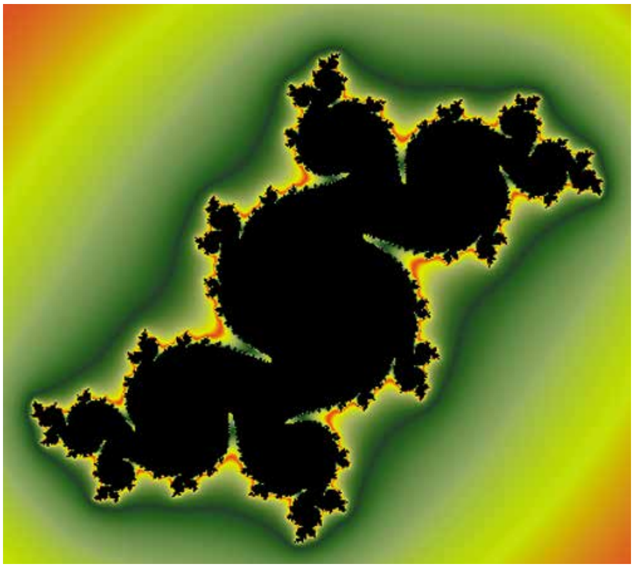
Ensemble de Julia, $c = -i$



Ensemble de Julia, $c = 0{,}32 + 0{,}043\,i$



Ensemble de Julia, $c = 1{,}245 + 0{,}465\,i$



Ensemble de Julia, $c = -0{,}1225 + 0{,}7449\,i$