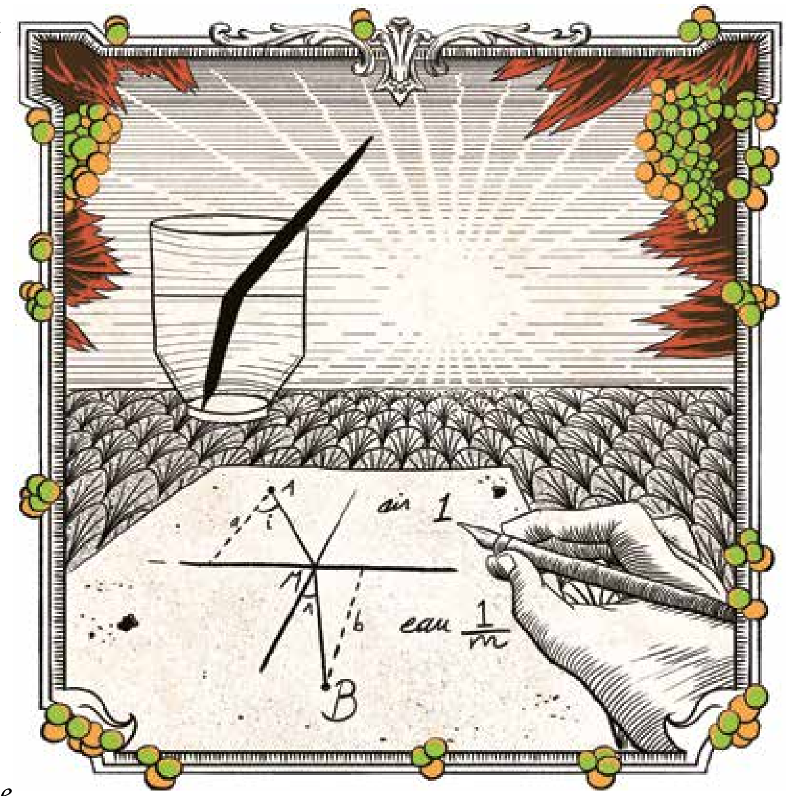
L'histoire de la belle démonstration de Maupertuis

À Berlin, je (c'est **Léonard Euler**, 1707-1783, qui raconte cette histoire) m'étais lié d'amitié avec **Pierre Louis Moreau de Maupertuis** (qui fut le président de l'Académie de Berlin à partir de 1746). Souvent, je le remplaçais dans sa charge lorsqu'il voyageait et j'appréciais non seulement sa grande capacité de synthèse, mais aussi le courage physique qu'il montra, par exemple, en allant en Laponie (en 1736) mesurer le degré de méridien près du pôle, lors d'une expédition longue et difficile.
Maupertuis (1698-1759) avait eu, vers 1740, une idée merveilleuse et simple à la fois : *Et si toutes les lois du monde obéissaient à un même principe ? Si, par exemple, les corps ne tombaient vers la Terre que parce qu'ils cherchaient à en faire le moins possible ? S'ils ne se déplaçaient jamais que pour minimiser quelque chose, un travail, une énergie, une force ou une action à découvrir ?*
Et si la lumière elle-même ne suivait son chemin que parce qu'il était le plus court ?
Maupertuis avait ainsi conçu l'idée d'un principe général, qui régirait les équilibres du monde :
le principe de moindre action !
Je me souviens de cette soirée magnifique où nous venions de déguster une belle friture d'ablettes dans une auberge de Potsdam sur les bords de la Havel.
Nous nous étions échappés du château de *Sans-Souci* et des fastes de la cour du roi Frédéric II…

Pierre Louis Moreau de Maupertuis

Le château de Sans-Souci à Potsdam, près de Berlin

Lomonossov se léchait les doigts avec délice ; il attira notre attention sur ces rayons de soleil crépusculaires qui coloraient l'atmosphère de roses et de pourpres flamboyants.
Maupertuis, qui avait apprécié le vin du Rhin généreusement servi, devint tout à coup très lyrique devant cette magie de la lumière.
Non sans malice et de l'air très docte qu'il savait si bien prendre pour se moquer de lui-même, il se proposa de nous démontrer la ***loi de Snellius*** sur la réfraction de la lumière (que les Français appelaient ***loi de Descartes***).
Supposons, nous dit-il, *que la lumière n'avance pas à la même vitesse dans l'air et dans l'eau, comme si elle peinait plus à se frayer un passage à travers les particules liquides. Et prenons pour principe que le Dieu créateur lui impose d'aller toujours d'un point à un autre dans le plus court des temps possibles*.



S'ensuivit alors une suite de calculs qu'il poursuivit sur la table même (voir l'illustration) et où nous le voyions jongler avec les lignes trigonométriques et leurs *différences*.
Il y mêlait bien un peu de théologie et **Voltaire** en profita pour l'attaquer sur ce point, plus tard, auprès des philosophes de l'Encyclopédie.

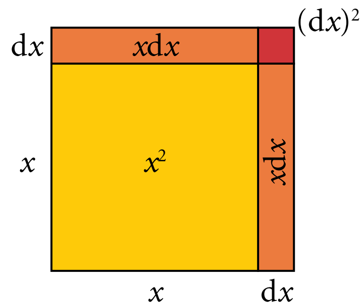
Émilie du Châtelet et Voltaire

Le roi **Frédéric** lui-même faillit être sensible aux arguments toujours si incisifs et si bien tournés de Voltaire ; mais finalement, il fit symboliquement brûler la *Diatribe du docteur Akakia*, *médecin du pape*, que Voltaire avait écrite contre Maupertuis.
Cependant, alors que l'on pouvait croire à une lutte de l'esprit et de l'intelligence sur une belle et importante question d'épistémologie fondamentale, je sus plus tard qu'il ne s'agissait que d'une querelle d'amants jaloux : **Émilie du Châtelet**, compagne attitrée de Voltaire, suscitait l'admiration de tous les hommes qui l'approchaient (car « *elle était aussi fine et brillante dans les sciences que dans les choses du Monde et des Arts* »), et elle ne fut pas, un temps, insensible au charme de mon ami Maupertuis…

Le **Kangourou** a réussi à se procurer la nappe sur laquelle Maupertuis avait écrit sa démonstration ! Elle est reproduite **page 23**. Pour la lire et la comprendre, vous pouvez d'abord lire la page 22 sur les bases du *calcul* appelé *différentiel*.

Annexe : sur le calcul différentiel…

Supposons qu'une fonction f dépende d'une variable x, et que cette variable x varie d'une petite quantité, par exemple de la quantité dx.
dx est une notation abrégée pour « différence de x ». Cette notation fut proposée par **Leibniz** en 1784 dans sa *Nouvelle méthode pour trouver les maxima et les minima…*
Cette quantité s'appelera ensuite « différentielle ».



De combien varie alors la fonction f ?

Calculons, par exemple, cette variation pour la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

$$f(x + \mathrm{d}x) = (x + \mathrm{d}x)^2 = x^2 + 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2.$$

On a $\quad f(x + \mathrm{d}x) - f(x) = 2x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2$.

Ainsi, la variation d'aire d'un carré de côté 1 mètre (et donc d'aire 1 m^2) quand on augmente son côté de 1 cm, vaut, d'après le calcul précédent, $2 \times 1 \times 0{,}01 + 0{,}0001$, soit 0,0201, qui est très peu différent de 0,02 (égal à $2x\mathrm{d}x$).

Ce phénomène d'approximation est très général : pour la plupart des fonctions f, quand on augmente la variable x d'une petite quantité dx, la valeur de $f(x)$ augmente d'une quantité proportionnelle à dx, plus une quantité très petite, de l'ordre du carré de dx (c'est-à-dire négligeable devant dx).
Le coefficient de proportionnalité s'appelle « dérivé de la fonction f en x » ; il est noté $f'(x)$
La fonction f' (ainsi définie) s'appelle « dérivée de la fonction f ».
Calculer la dérivée d'une fonction est une sorte de mécanique qui s'apprend en classe de première.
Pour passer le baccalauréat, on exige en effet des élèves qu'ils connaissent les fonctions dérivées des fonctions classiques.
Le tableau suivant donne les dérivées de six fonctions :

$f(x)$	$f'(x)$
constante	0
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

La « différentielle de f » s'obtient donc en multipliant la « différentielle de x » par $f'(x)$ et on écrit

$\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, la quantité $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pouvant se traiter comme un véritable quotient.

Par exemple, si $f = \dfrac{1}{u}$ et donc $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ on peut écrire $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-1}{u^2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

On calcule ainsi $\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{-1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

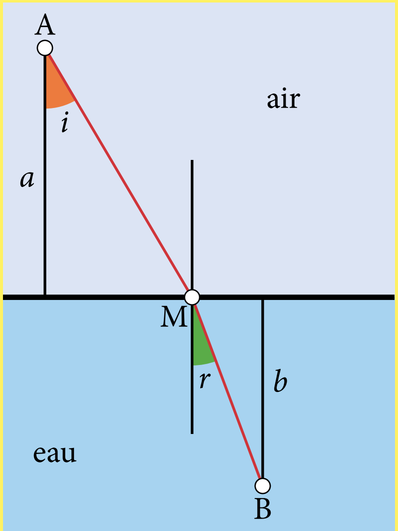
La dérivée d'une fonction constante est évidemment nulle pour toute valeur de « la » variable. Mais $f'(x)$ peut aussi s'annuler dans le cas où la fonction f présente un maximum ou un minimum, comme nous le dit si bien **Newton** dans son ouvrage sur *les Fluxions* écrit en 1666 (ici traduit par **Buffon**) :

Une quantité qui est devenue la plus grande ou la plus petite qu'il se peut n'augmente ni ne diminue, c'est-à-dire ne flue ni en avant, ni en arrière dans cet instant ; car si elle augmente, c'est une marque qu'elle était plus petite et que, tout à l'heure, elle va être plus grande qu'elle n'était, ce qui est contre la supposition, et c'est le contraire si elle diminue.

La démonstration de Maupertuis

Voici maintenant une reproduction fidèle (dans l'esprit tout au moins) de la nappe de l'auberge de Potsdam, évoquée page 5, assortie de quelques commentaires.

En quel point M la lumière doit-elle passer entre A et B ?



Dans l'air, la vitesse de la lumière est c ; et dans l'eau elle est de $\frac{c}{n}$, avec $n = 1{,}3$.

Le temps mis par la lumière de A à B (sur AM + MB) vaut donc : $T = \frac{a}{\cos i} \cdot \frac{1}{c} + \frac{b}{\cos r} \cdot \frac{n}{c}$.

La différentielle dT de T est nulle au minimum du temps.

Et on a une distance horizontale invariable quand M varie : $a \cdot \tan i + b \cdot \tan r = constante$.

La différentielle de *constante* est nulle.

D'où $\frac{a \cdot \sin i}{\cos^2 i} + \frac{b \cdot n \cdot \sin r}{\cos^2 r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 0$ et $\frac{a}{\cos^2 i} + \frac{b}{\cos^2 r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 0$.

D'après la première égalité, on a $\frac{-b}{\cos^2 r} \cdot \frac{\cos^2 i}{a} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \frac{\sin i}{n \cdot \sin r}$.

Et, d'après la deuxième : $\frac{-b}{\cos^2 r} \cdot \frac{\cos^2 i}{a} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 1$. On a donc $\frac{\sin i}{n \sin r} = 1$.

Finalement, le point M est tel que : $\boldsymbol{\sin i = n \cdot \sin r}$.

CQSDD (Ce que Snellius et Descartes ont démontré).