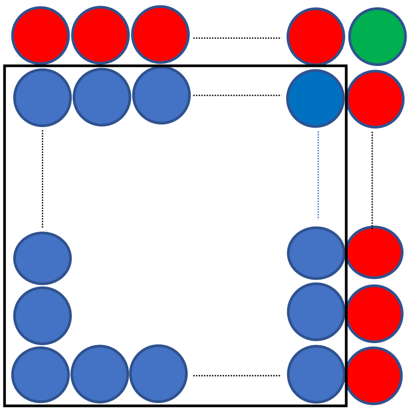
Le carré du suivant

La formule **$(k+1)^2 = k^2 +2k + 1$**, cas particulier de celle donnant $(a+b)^2$, s'illustre, assez joliment, par la figure ci-dessous.



Soit, en effet, un carré de boules, ici bleues, de côté k.
Si on lui rajoute une ligne et une colonne, ici rouges, de longueur k et encore 1 boule, ici verte, alors le nombre de boules est tout simplement égal à k^2+2k+1.
Mais, comme on le voit sur la figure, ce nombre vaut aussi $(k+1)^2$.
D'où la formule, valable pour tout k : $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$.

Application au calcul (mental)

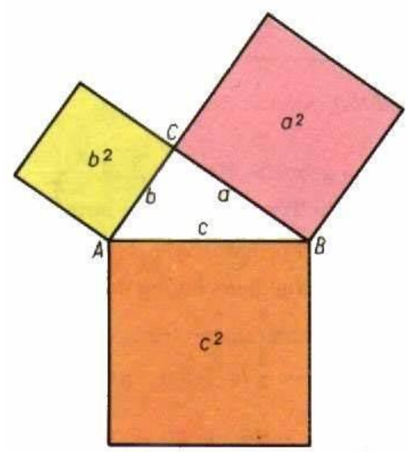
Il est assez pratique, et on se doit donc, de connaître les carrés des nombres entiers de 1 à 20.
Si on a quelque défaut de mémoire, la formule précédente est utile, sous sa forme : $(k+1)^2 = k^2 + (k) + (k + 1)$.

Ainsi, on se souvient facilement du carré de 12 : c'est 144.
Le carré de 13 vaut donc 144+12+13, soit 169.

On n'oublie pas que $16^2=256$. (En effet, on se doit aussi de connaître les puissances de 2 jusqu'à la dixième).
Et donc $17^2 = 256 + 16 + 17 = 256 + 33 = 289$.
Puis $18^2 = 289 + 17 + 18 = 324$.

On peut aussi utiliser la formule un peu à l'envers :
$19^2 = 20^2-19-20 = 400-39 = 361$.

Application à des triangles rectangles



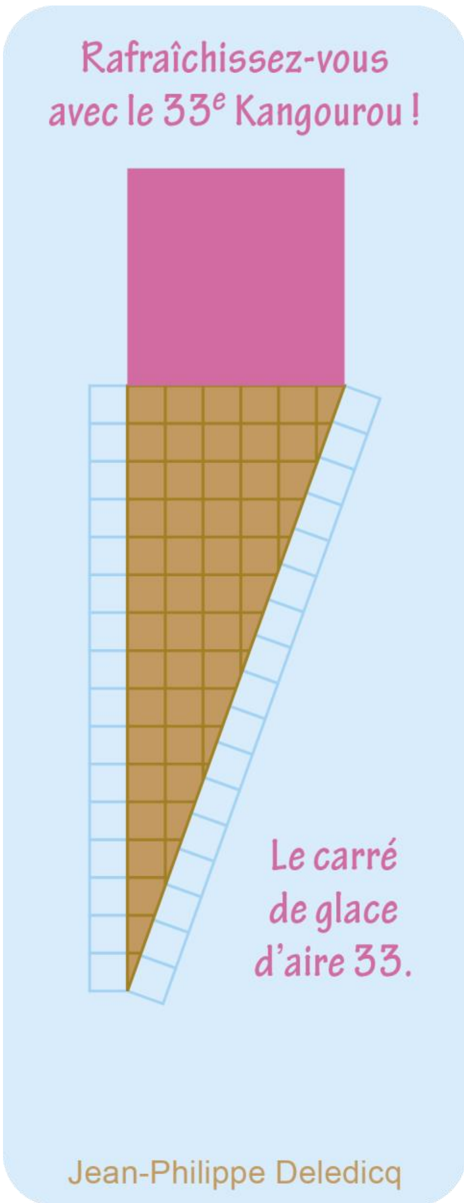
Dans un triangle rectangle d'hypoténuse *c* et de côtés de l'angle droit de longueurs *a* et *b*, on a la formule de Pythagore :
$a^2 + b^2 = c^2$ ou $c^2 - a^2 = b^2$.

De la formule $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$, on déduit aussi $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$.

On a ainsi établi le résultat géométrique (pour tout entier strictement positif k) :
Dans un triangle rectangle d'hypoténuse k+1 et dont l'un des côtés de l'angle droit vaut k, l'autre côté de l'angle droit a pour carré le nombre impair 2k+1.

On peut donc considérer tout nombre impair comme le carré de la longueur d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont les longueurs de l'autre côté de l'angle droit et de l'hypoténuse sont deux entiers consécutifs.

Par exemple,
avec k = 16,
$(16+1)^2 = 16^2 + 16 + 17$,
$17^2 = 16^2 + 33$,
et on a la figure ci-contre…
… qui n'est autre qu'un *carré* de glace posé sur sa gaufrette "conique" non symétrique !



Le Kangourou 2023 est le 33e *Kangourou des maths*. Son affiche montre un kangourou d'aire 33 (avec application du théorème de Pythagore) ainsi que l'objet sur lequel nous voyons le plus souvent écrit le nombre 33.
À voir à l'adresse :
http://www.mathkang.org/concours/affiche2023.html