

Les Géométries finies & les jeux FANO

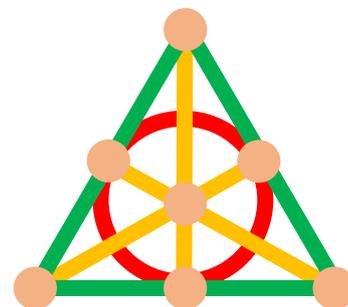
© 2021 – Kangourou - Deledicq

Un peu d'histoire de mathématiques

En 1899, David Hilbert (1862-1943) redéfinit la géométrie euclidienne à partir de 21 axiomes, dont deux énonçaient ceci :
Par deux points, il passe une droite et une seule.

Deux droites distinctes non parallèles se coupent en un et un seul point.

Plus tard, en 1935, parlant plus généralement de la géométrie dans l'espace, il écrit une phrase devenue célèbre : *On doit pouvoir, en géométrie dans l'espace, remplacer les mots points, droites et plans, par les mots tables, chaises et verres de bière !*



Il y a un peu plus d'une centaine d'années, le mathématicien italien Gino Fano (1871-1952) a ainsi étudié les ensembles de *points* dans lesquels on peut distinguer des sous-ensembles, appelées *droites*, ayant plutôt les propriétés suivantes :

- . 2 *points* distincts appartiennent à une et une seule *droite*.
- . 2 *droites* distinctes ont un et un seul *point* en commun.

De tels axiomes (où il n'y a plus de parallèles), définissent ce qu'on appelle une géométrie dite « projective ». Fano développe cette sorte de géométrie dans un espace à deux dimensions contenant un nombre *fini* de points. Il montre que, dans un *plan de Fano*, il y a autant de *points* que de *droites* et que, si chaque *droite* contient *n points*, alors chaque *point* appartient à *n droites*.

Dans un tel plan, un point étant choisi, *n droites* passent par ce point, chacune contenant *n-1* autres points. Cela fait $1+n(n-1)$ points, soit n^2-n+1 . Un plan de Fano peut donc avoir n^2-n+1 points et, donc aussi, n^2-n+1 *droites*.

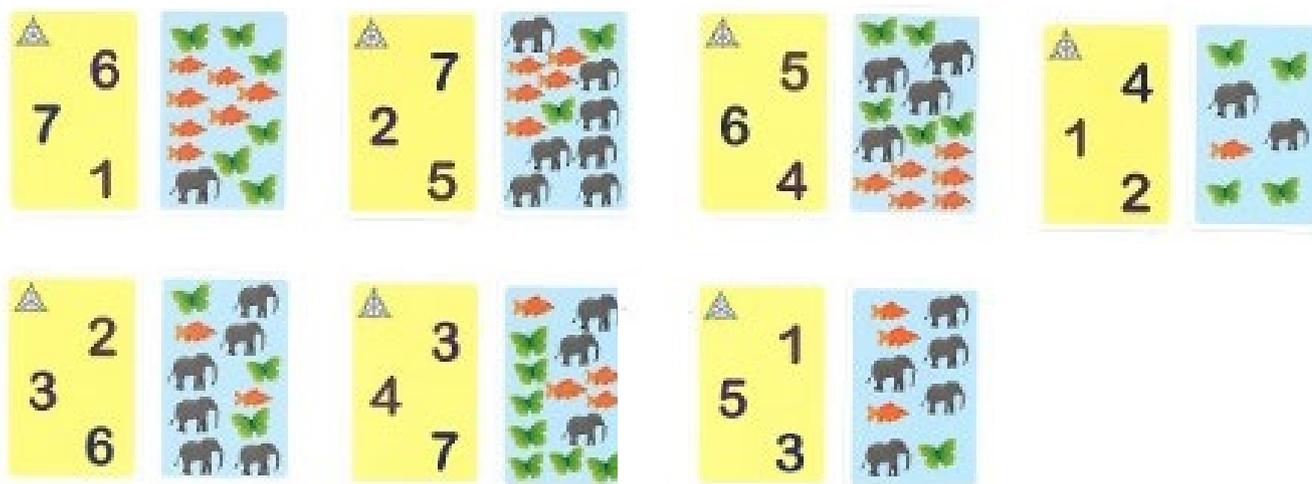
Gino Fano avait dessiné, dans le cas $n=3$, la figure en tête de cet article, que nous avons choisie comme une sorte de logo.

Dans cette figure, chaque *droite* a 3 *points* et chaque *point* appartient à 3 *droites* ; et il y a 7 *points* et 7 *droites* (une des « droites » y est représentée comme un cercle).

Les jeux FANO

Parmi les jeux offerts par le Kangourou en 2021, il y avait quelques jeux (que nous avons décidé d'appeler FANO, en hommage à Gino Fano), dont un jeu de 7 cartes, dont nous donnons ci-dessous une version.

Au recto figurent 3 nombres (entre 1 et 7), et au verso les mêmes nombres sont représentés par des groupes d'animaux.



Dans ce jeu de 7 cartes :

- . Deux cartes quelconques n'ont qu'un nombre en commun.
- . Deux nombres sont ensemble sur une et une seule carte.
- . Chaque carte contient 3 nombres et chaque nombre est représenté sur 3 cartes.

On est donc bien dans la situation d'un plan de Fano et devant une illustration parfaite de la phrase de David Hilbert : *dans les jeux FANO, les droites sont les cartes et les points sont les nombres écrits ou représentés sur chaque carte.*

L'étude théorique, menée par Gino Fano, montre qu'un plan de Fano peut contenir 7 droites, et autant de points (pour $n=3$), ou 13 cartes (pour $n=4$), ou 21 (pour $n=5$), ou 31 (pour $n=6$) ou 43 (pour $n=7$), ou 57 (pour $n=8$)...

Le jeu commercialisé sous le nom de *Dobble* serait un vrai jeu de Fano s'il avait 57 cartes ; mais il manque 2 cartes à ce jeu qui n'en a que 55 ! Pourtant, chaque carte montre 8 objets et chaque objet est représenté sur 8 cartes.

On peut d'ailleurs ainsi, toujours enlever (ou perdre !) un nombre quelconque de cartes d'un jeu complet. Cela n'empêche pas de jouer avec la même règle !

Des jeux pédagogiques du type FANO ont été commercialisés par la marque *Cat's family* sous le nom de *Détective Mathéo*.

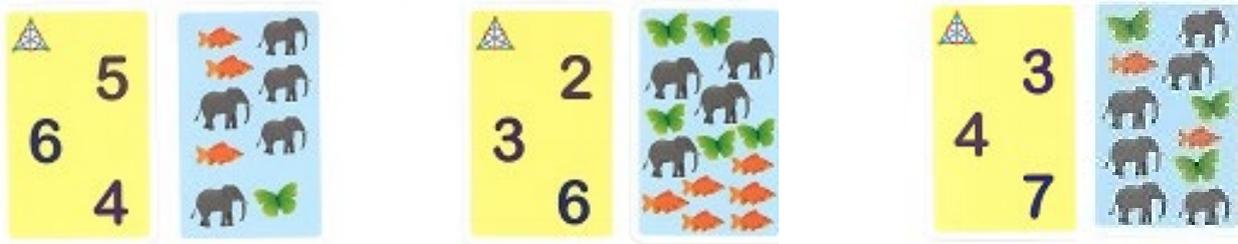
Une règle des jeux de cartes Fano

Le fait que le recto et le verso d'une carte puissent représenter le même objet sous deux formes différentes permet une intéressante façon de jouer (d'abord remarquée par Alain Brobecker, professeur et créateur de jeux) : en présentant un recto de carte et un verso, on est sûr qu'il y a un et un seul objet en commun.

D'où la possibilité de jouer à un jeu fano avec la règle suivante :

1. Les cartes du jeu sont placées sur un « talon », recto dessus.
2. Le meneur de jeu retourne la carte au-dessus du talon et la pose à côté.
3. Le premier joueur qui annonce l'objet (ici le nombre) écrit et représenté sur les deux cartes visibles prend, si c'est juste, cette carte. S'il s'est trompé, il rend une carte au talon (ou passe le tour de carte suivant). Un autre joueur peut annoncer un autre nombre.
4. Le gagnant de la partie est celui qui a obtenu le plus de cartes.

À vous de jouer lorsque les deux cartes visibles sont les suivantes :



Réponses : 5 (éléphants), 6 (poissons), 3 (papillons)

Comment fabriquer des jeux FANO de 7 cartes ?

1. Choisissez une correspondance entre 2 listes de 7 éléments chacune. Une liste fera les rectos, l'autre les versos. Par exemple dans le jeu proposé ci-dessus, les nombres de 1 à 7 sont au recto et des nombres d'animaux sont au verso.

2. Utilisez le grand dessin à 7 cases, dessiné ci-dessous.

3. Marquez les éléments de la première liste dans chacune des cases comme sur le dessin de droite.

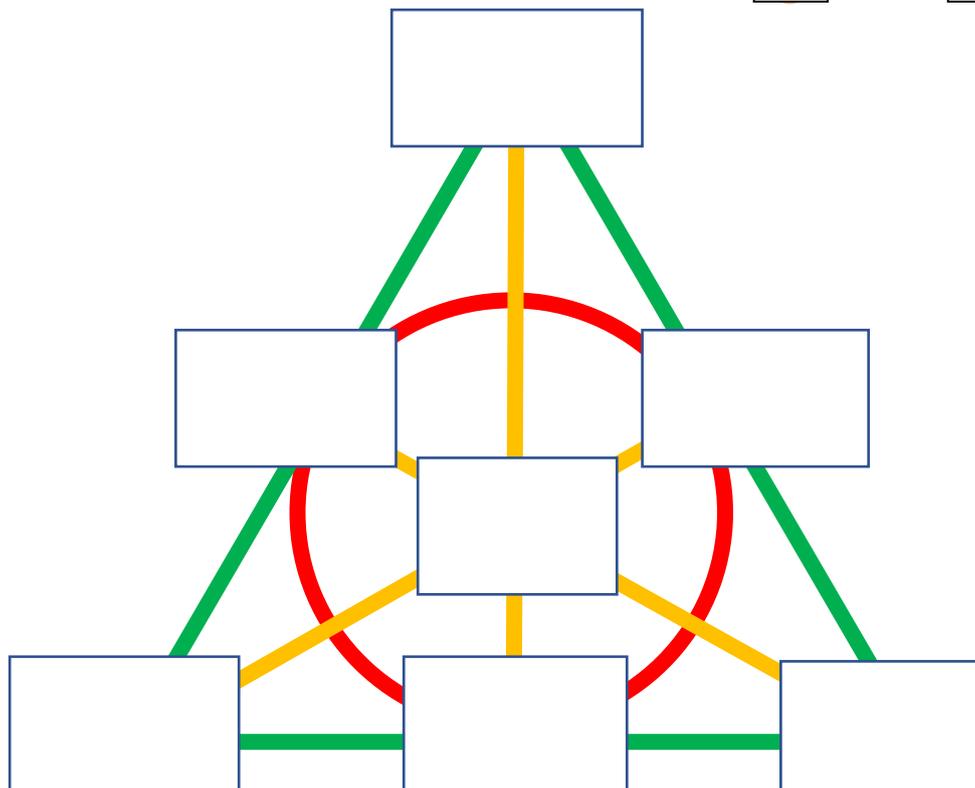
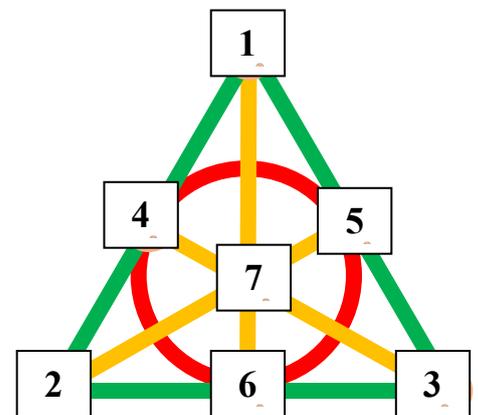
4. Chaque recto de carte correspond alors à une ligne (droite ou cercle) du dessin.

Par exemple pour les cartes du jeu avec les nombres de 1 à 7 nous avons les 7 rectos :

(1, 4, 2), (1, 5, 3), (1, 7, 6), (4, 5, 6), (2, 7, 5), (4, 7, 3) et (2, 6, 3).

Remarquez que vous pouvez placer les éléments que vous voulez dans les cases que vous voulez.

5. Pour les versos, marquez sur chaque carte les correspondants des trois éléments placés au recto.



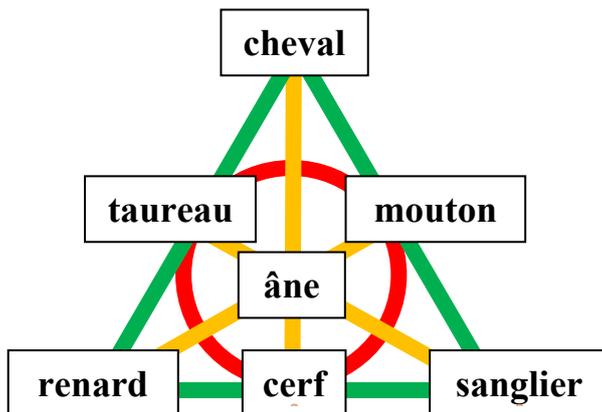
Vous pouvez photocopier ce schéma et le compléter, pour fabriquer un jeu de Fano à 7 cartes pour vos enfants ou vos élèves, sur n'importe quel thème ou sujet de votre invention...

Par exemple, vous pouvez fabriquer un jeu FANO pour jouer avec les noms des 7 premiers nombres en anglais !

Pour cela, marquez sur le recto de 7 cartes, les mêmes nombres que sur le FANO de 7 cartes précédent. Puis marquez, au verso, les noms en anglais des nombres correspondants, comme sur le tableau suivant, où les cartes sont indiquées en colonne :

	1° carte	2° carte	3° carte	4° carte	5° carte	6° carte	7° carte
recto	1 4 2	1 5 3	1 7 6	4 5 6	2 7 5	4 7 3	2 6 3
verso	Four One Two	Three Five One	One Six Seven	Five Six Four	Two Seven Five	Seven Three Four	Three Six Two

Toutes les disciplines peuvent amuser les élèves avec des jeux FANO spécifiques ! Ainsi, pour jouer avec les cris des animaux, vous pourriez fabriquer un jeu FANO de 7 cartes en remplissant le schéma suivant...



...et en inscrivant, sur les cartes, les mots correspondants au tableau suivant...

recto	cheval âne cerf	taureau cheval renard	mouton cheval sanglier	âne taureau sanglier	renard âne mouton	cerf renard sanglier	taureau cerf mouton
verso	hennit braït brame	beugle hennit glapit	bêlé hennit grommelle	braït beugle grommelle	glapit braït bêlé	brame glapit grommelle	beugle brame bêlé

Vous pouvez aussi dessiner le contour d'un pays au recto et mettre son nom au verso ; ou bien écrire les jours de la semaine en français au recto et leur traduction en espagnol au verso ; ou encore mettre le titre d'un livre au recto et le nom de son auteur au verso ; ou...

Vous trouverez sur <http://www.mathkang.org/fano/> d'autres commentaires et vous y apprendrez à **fabriquer d'autres jeux FANO, par exemple des jeux de 13 cartes (à 4 objets par carte), ou des jeux de 21 cartes (à 5 objets par carte) ...**

Les cartes FANO sont en vente sur : www.mathkang.org/catalogue/prodfano.html