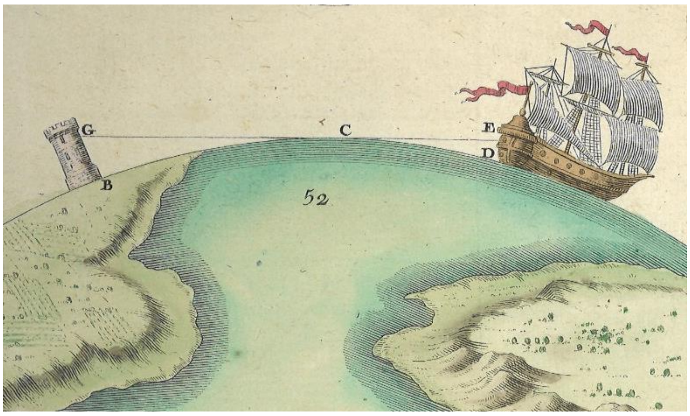
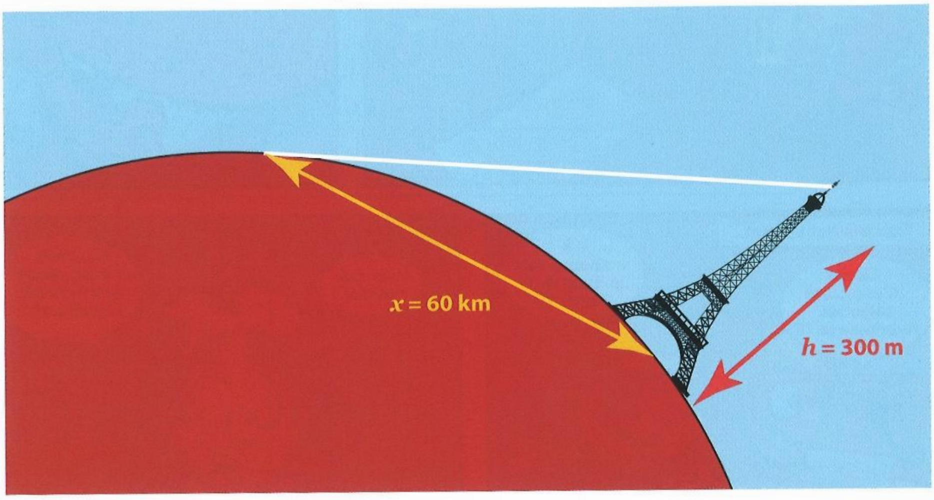
Mesurer les distances et les hauteurs d'objets apparaissant à l'horizon



Le Kangourou avait fait paraître, en 2020, un article, intitulé *Les horizons d'Antoine Odier* dans *Ah les maths*, ci-après reproduit !
Nous avons découvert depuis que sa très curieuse et efficace formule (dd=12h, liant la distance d'un objet dont le haut apparaît à l'horizon à sa hauteur) se trouvait déjà dans un manuscrit du XVII[e] siècle, aux unités d'époque près…

Les horizons d'Antoine Odier

Antoine Odier fut un des pionniers de l'aviation. Dans ses ***Souvenirs d'une vieille tige*** (Arthème Fayard, 1955), il raconte que l'armée avait autorisé quelques aviateurs-ingénieurs à utiliser le terrain militaire d'Issy-les-Moulineaux entre 4 heures et 6 heures du matin : *au début de 1909, nous étions cinq ou six, Blériot, Voisin, Nieuport, Santos-Dumont, Védovelli et moi-même, …*
Dans ces mêmes *Souvenirs*, il explique comment de nombreux petits calculs viennent enrichir et faire mieux comprendre la vie de tous les jours.



Par exemple, quand il arrivait à Paris en train, il guettait toujours le moment où il apercevait le sommet de la Tour Eiffel ; et il s'était inventé la formule suivante $x \times x = 12 \times h$, où h est la hauteur (en mètres) de quelque chose et x la distance (en kilomètres) d'où on peut en voir le sommet, compte tenu de la rotondité de la Terre.

C'est une formule étonnante, en particulier par le mélange des unités de mesures qui la rend d'apparence si simple, comme cela arrive souvent avec les ingénieurs des *Arts et Métiers*.
La formule d'Odier nous montre que le sommet de la Tour Eiffel se voit donc à partir de 60 km de distance. En effet, $h = 300$, alors $12 \times h = 3600$, et $x \times x$ vaut donc 3600 ; et, comme $3600 = 60 \times 60$; x vaut 60 en kilomètres.

Des horizons
En appliquant la formule d'Odier, …
… À quelle distance de la Terre se trouve une frégate lorsque le « mousse », qui est en haut du mât à 33 mètres de haut, peut crier « Terre ! » ?
… Jusqu'à combien de kilomètres peut-on voir la Terre par le hublot d'un avion à 10000 mètres de haut ?
… Jusqu'à quelle distance, dans la mer ou un lac, peut voir un nageur qui a les yeux à 9 cm au-dessus de l'eau ?
… Montrer que la hauteur que doivent monter Alice et Matt pour se voir est bien de 3 mètres !

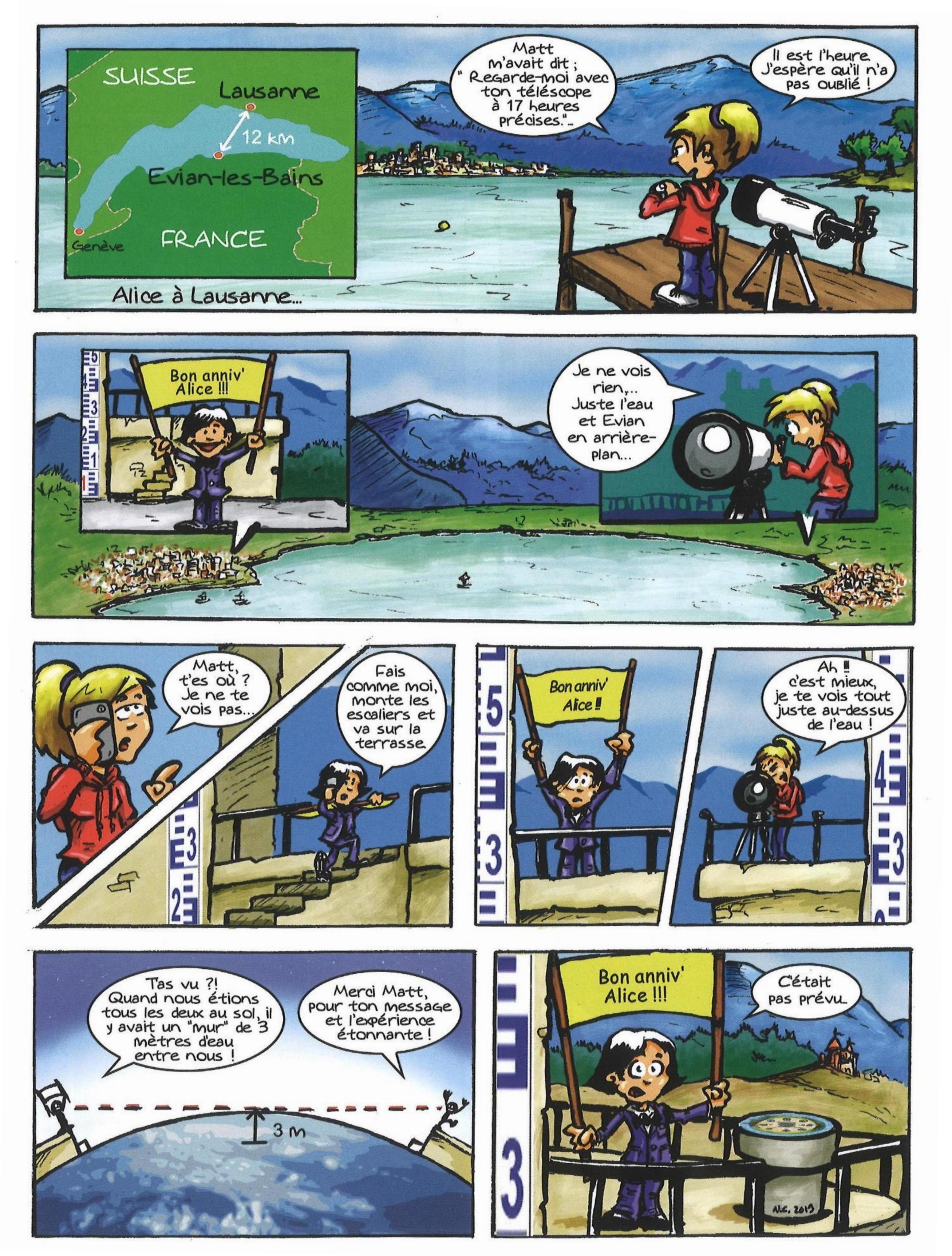
h=33 mètres, d≈20 km

h=10 000 m, d≈350 km

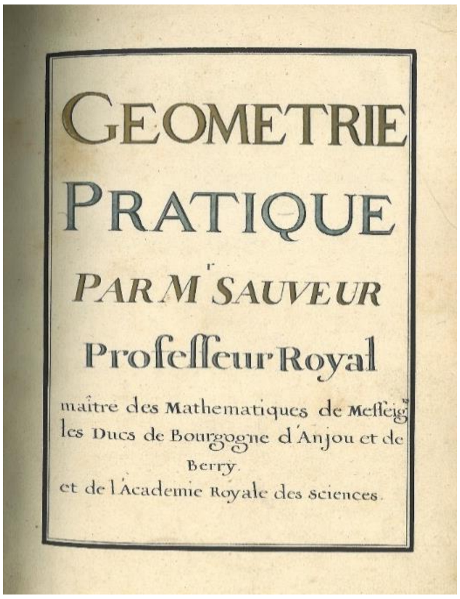
d=1 km, h=9 cm

d=6 km, h=3 m

La page *les horizons d'Antoine Odier* était accompagnée de la bande dessinée suivante :



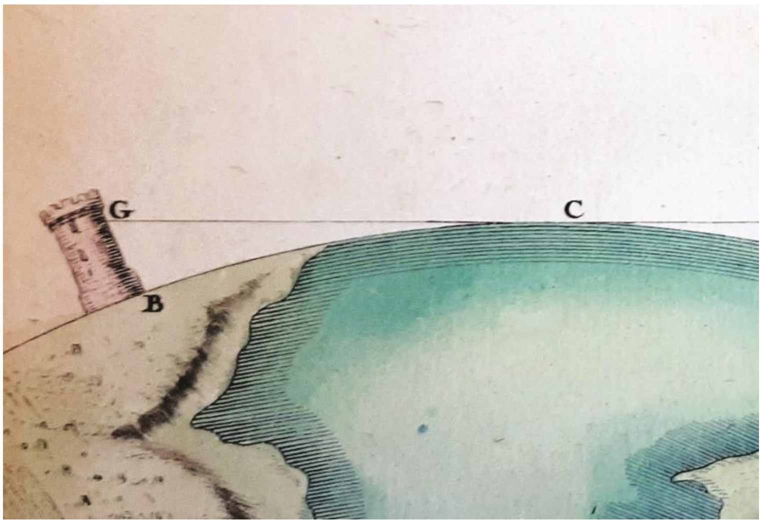
Voyez notre catalogue : [AH ! LES MATHS](), collection BD-Maths



GEOMETRIE
PRATIQUE
PAR Mr SAUVEUR
Profeſſeur Royal
maître des Mathematiques de Meſſeig.rs les Ducs de Bourgogne d'Anjou et de Berry
et de l'Academie Royale des sciences.

La formule de Joseph Sauveur

Quelle ne fut pas notre surprise de découvrir le truc étonnant d'Antoine Odier (consistant à utiliser des unités différentes dans une même formule) à la lecture de la *Géométrie pratique* de Joseph Sauveur (1653-1716). Dans son livre V, *De la longimétrie ou mesure des lignes,* on trouve le chapitre VIII intitulé *De la mesure des hauteurs des montagnes et des distances sur mer.* Sauveur traite d'abord de la mesure de la hauteur d'une montagne ; puis, d'une manière analogue, il mesure la distance d'un bateau sur la mer.

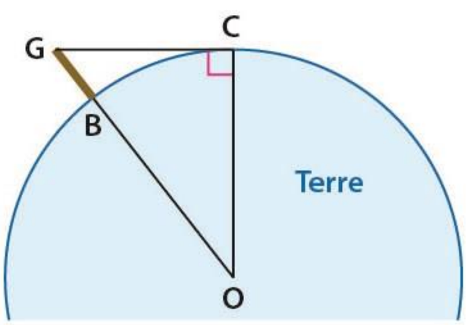


Mais attention, la distance est mesurée en toises, et la hauteur en pouces.

Voici le passage intéressant :
Cette pratique, quoique peu juste, peut néanmoins avoir ses utilités […] Si un vaisseau E s'éloigne d'un point B dans lequel il y a une tour AB ou quelques autres choses dont on connaît la hauteur par-dessus la surface de la mer aussi bien que celles de ses parties les plus sensibles, il faut regarder avec une lunette d'approche quelle partie G de cette tour l'on voit immédiatement au-dessus de la surface de la mer, qui est convexe, à cause de la rondeur de la Terre ; ensuite pour avoir la distance CB puisqu'on connaît la hauteur BG en pieds il la faut réduire en pouces et en tirer la racine carrée du nombre de ces pouces par laquelle il faut multiplier 300 toises. Le produit donnera la distance GC.

La relation liant la distance D (du haut de la tour à l'horizon) et la hauteur de la tour H est donc, d'après Sauveur :
$D \approx 300\sqrt{H}$, soit : $DD \approx 90\,000\ H$ (D exprimée en toises et H en pouces).
Vérifions d'abord que cette formule est très proche de celle d'Odier.
Sachant qu'une toise vaut environ 2 mètres, qu'un pied vaut environ 1/3 mètre et un pouce 12 fois moins, on a H=36h et D=500d, soit avec les mesures d en km et h en mètres :
dd=(9×36/25)h ; cela donne finalement dd~13h, qui est plus juste que la formule d'Odier (lequel préférait le nombre 12, plus commode que 13, pour simplifier les calculs).

Et voici maintenant la justification de la formule de Sauveur-Odier :



Dans le triangle rectangle OCG, le théorème de Pythagore donne : $OC^2 + GC^2 = OG^2$.
Mais l'angle <GOC étant très petit, OB et OC sont quasiment parallèles, la longueur BG (égale à h) est très petite devant le rayon de la Terre (6400 km) et GC (très proche de BC est égal à la distance d.
D'où la formule, puisque OG=OB+h :
$6400^2 + d^2 = (6400^2 + 2\times6400h + h^2)$. Et donc :
$d^2 = h(2\times6400+h)$. D'où, h étant négligeable devant 12800 : $d^2 \approx 12{,}8h$, avec h en mètres et d en km.