Le flocon de von Koch

Helge von Koch, en 1904, dessine le flocon de neige le plus célèbre de l'histoire des mathématiques.

Voici l'idée précise de von Koch :

- Partir d'un segment, VonKoch(0).
- Découper le segment en tiers, et remplacer le tiers central par les deux autres côtés du triangle équilatéral construit sur lui. On obtient la figure VonKoch(1).

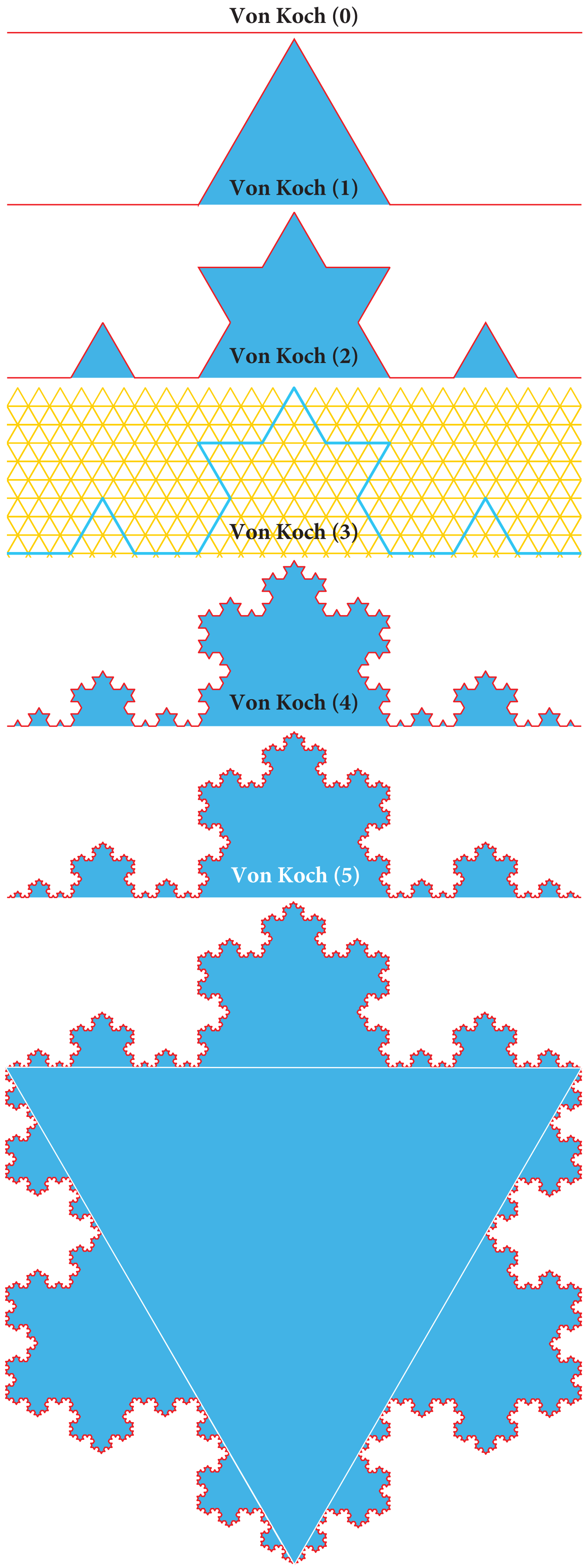
Jusque-là, rien de terrible, mais le coup de génie c'est de décider de recommencer ce que l'on a fait au segment VonKoch(0) non seulement à chacun des 4 segments de VonKoch(1) pour dessiner VonKoch(2), mais de continuer l'opération dès qu'un segment se trouve dessiné, et cela jusqu'à l'infini !

La courbe obtenue « à la fin » est excessivement brisée.

Défi 4

Nous avons dessiné, ci-contre, en bleu clair sur un « trillage » jaune, la courbe VonKoch(2).

Dessinez, en noir, la courbe VonKoch(3).



La longueur de la courbe VonKoch(n) est, tout simplement,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n,$$

puisque, à chaque étape, trois segments sont remplacés par quatre segments de longueur 1/3.

Quand n tend vers l'infini, la longueur de VonKoch(n) tend donc vers l'infini.

Et il en serait de même de la frontière du « flocon » suggéré ci-contre, même si un nombre fini en mesure la surface.

Cette surface vaut exactement (avec le côté du premier triangle pour unité)

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

soit environ 0,65.

Construction du tiers du flocon de von Koch

La courbe K_0 est le segment $[AB] = [0, 1]$.
Les 4 transformations transformant $[AB]$ en 4 segments formant la courbe K_1 sont :

T_0 : l'homothétie de centre A de rapport $\frac{1}{3}$.

T_1 : la rotation de centre A, d'angle 60°, suivie de l'homothétie de centre A de rapport $\frac{1}{3}$, suivie de la translation de vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Pour info, dans cette transformation, le point (x, y) devient le point (x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}y + \dfrac{1}{3} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{6}x + \dfrac{y}{6} \end{cases}$$

T_2 : la rotation de centre A, d'angle 120°, suivie de l'homothétie de centre A de rapport $\frac{1}{3}$, suivie de la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Pour info, dans cette transformation, le point (x, y) devient le point (x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{x}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}y + \dfrac{2}{3} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{6}x - \dfrac{y}{6} \end{cases}$$

T_3 : l'homothétie de centre A de rapport $\frac{1}{3}$, suivie de la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Le programme de tracé, par ordinateur, des courbes K_n est extrêmement simplifié par le fait que les différents segments composant K_n se trouvent naturellement numérotés par la suite des nombres écrits en base 4.

Voyez, par exemple, ci-contre, la numérotation des 64 segments de K_3, de 000 à 333.
De sorte que le segment numéro $\overline{abc}$ est le transformé de K_0 par T_a, puis T_b, puis T_c (à des changements d'origine près).