$\sqrt{2}$ est irrationnel

L'algorithme d'Euclide

Dans les "Éléments" d'Euclide, au chapitre VII, on trouve les quelques propositions qui justifient la recherche du PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux nombres par *l'algorithme d'Euclide* ici rappelé :
Soit à chercher la "commune mesure" (c'est-à-dire le PGCD) de 24 et 78 : cette commune mesure mesure aussi leur différence

$$\mathbf{78 - 24 = 54}$$

Mesurant à la fois 24 et 54, elle mesure aussi la différence **54 – 24 = 30**
Mesurant à la fois 24 et 30, elle mesure aussi la différence **30 – 24 = 6**
Mesurant à la fois 24 et 6, elle mesure aussi la différence **24 – 6 = 18**
Mesurant à la fois 18 et 6, elle mesure aussi la différence **18 – 6 = 12**
Mesurant à la fois 12 et 6, elle mesure aussi la différence **12 – 6 = 6**
Mesurant à la fois 6 et 6, cette commune mesure vaut 6.
(On aura compris que l'on peut aller plus vite en remplaçant une suite de soustractions du même nombre par une division entière faisant apparaître immédiatement le reste de cette division. Ainsi pour $78 = 2 \times 24 + 6$ et $24 = 6 \times 4 + 0$.)
Si cette recherche d'une commune mesure n'aboutit jamais, alors c'est que les grandeurs initiales sont *incommensurables*.

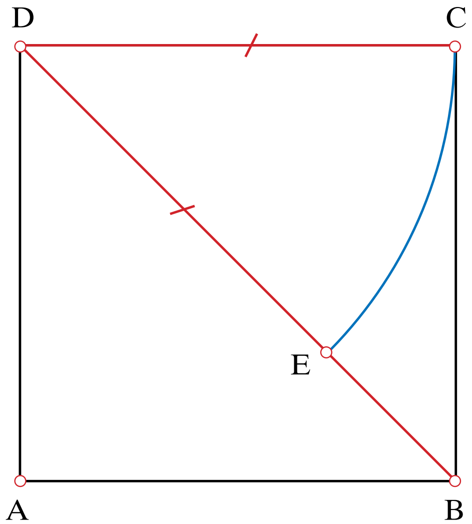
Le côté du carré et sa diagonale

C'est grâce à ce procédé que les prédécesseurs d'Euclide démontrèrent l'incommensurabilité du côté et de la diagonale du carré par un raisonnement qui est le premier exemple de ce que Fermat appellera la DESCENTE INFINIE.
Reconstituons ce raisonnement à partir du carré ABCD.
On cherche un segment u qui serait une commune mesure de BC et BD, c'est-à-dire qu'il serait contenu un nombre entier n de fois dans BC et un nombre entier m de fois dans BD.
Effectuons alors les constructions suivantes.

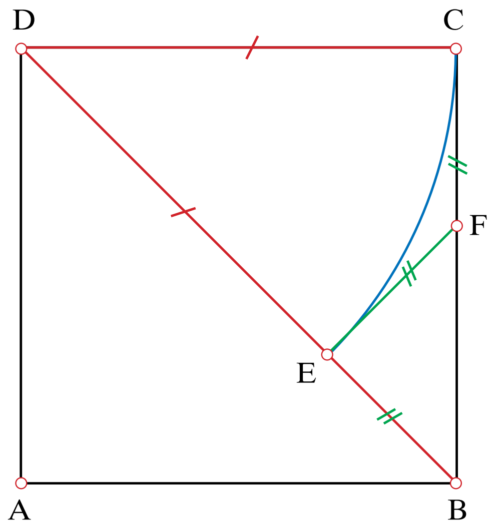
I. Le cercle de centre D passant par C coupe la diagonale en E.

$$EB = DB - DC$$

Le segment [EB], différence entre la diagonale et le côté, est donc mesuré lui aussi par un nombre entier de fois u.



II. La tangente en E à ce cercle coupe le côté [BC] en F. Les droites (EF) et (BE) sont perpendiculaires ; le triangle EFB est rectangle isocèle en F, donc EB = EF.



De plus, EF = FC, puisque (FC) et (FE) sont les deux tangentes au cercle issues de F.

© ACL - Éditions du kangourou (extraits)

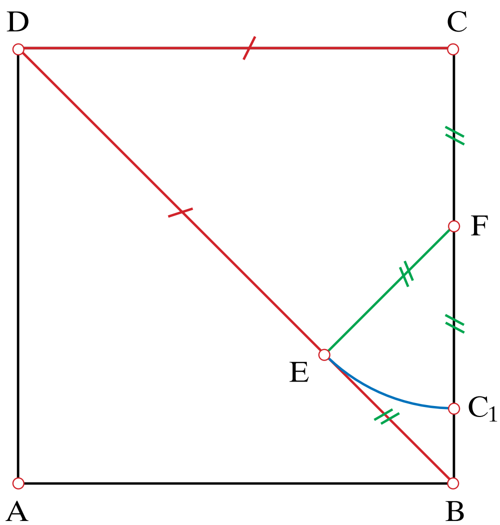
Finalement BF = BC – FC = BC – EB est la différence entre le côté du carré et EB. Le segment [BF] est donc mesuré lui aussi par un nombre entier de fois l'unité *u*.

III. Le cercle de centre F passant par E coupe [BC] en C_1.

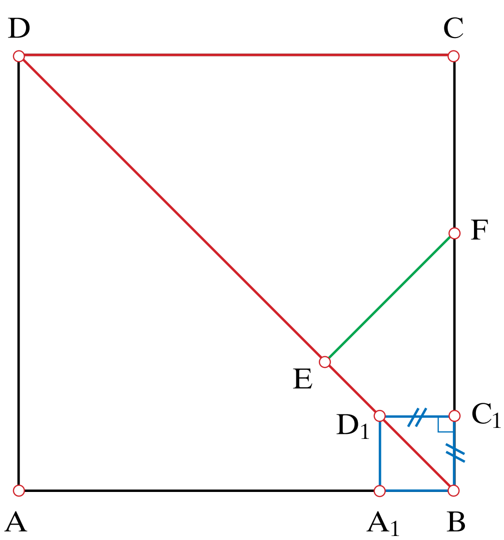
$$EB = EF = FC_1$$

$$BC_1 = BF - FC_1 = BF - EB.$$

Le segment [BC] est donc mesuré lui aussi par un nombre entier de fois l'unité *u*.



IV. Le carré $C_1D_1A_1B$ a pour côté $[BC_1]$, avec $(C_1D_1) \perp (BC)$.

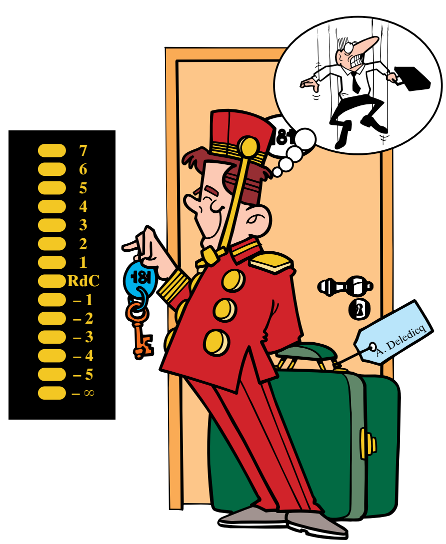


On a, comme dans (**II**): $BC_1 = C_1D_1 = ED_1$.
Et $BD_1 = EB - BC_1$ est donc lui aussi mesuré par un nombre entier de fois l'unité *u*.
On est alors dans la situation suivante :

Si *u* est une mesure commune de BD et BC, côté et diagonale d'un (grand) carré, alors c'est aussi une mesure commune de BD_1 et BC_1, côté et diagonale d'un (petit) carré.
C'est ici que se place une contradiction : en effet, on peut recommencer à partir de $A_1BC_1D_1$ ce que l'on a fait avec ABCD, pour obtenir un carré $A_2BC_2D_2$, puis un carré $A_3BC_3D_3$, et ainsi de suite… De sorte que si le côté BD du premier carré est mesuré (avec l'unité *u*) par un entier, le côté BD_1 du deuxième carré est mesuré par un entier strictement plus petit, et le côté BD_2 du carré suivant, par un entier encore plus petit, et ainsi de suite…
Or **il est impossible de diminuer indéfiniment un entier positif**, puisque 0 serait obtenu au bout d'un nombre fini de fois !
Cette contradiction mène à refuser l'hypothèse initiale :
Il ne peut exister de mesure commune *u* permettant de co-mesurer BC et BD par des entiers.

La descente infinie en résumé

Si je connais un moyen *infaillible* pour faire descendre un ascenseur d'un étage (3 mètres par exemple) quel que soit l'endroit où il se trouve, alors il ne faut pas me laisser manœuvrer un ascenseur.



© ACL - Éditions du kangourou (extraits)