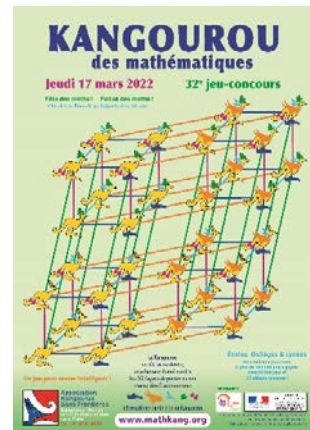


## Au-delà de la dimension 3... (texte pour les professeurs)

La figure de l'affiche du Kangourou 2022 représente une relation d'ordre partiel (un *treillis* en mathématique). Géométriquement, c'est un *hypercube de dimension 5*.



**Exercice :** Si vous en avez le courage, vous pouvez essayer de vérifier qu'il y a bien, sur l'affiche, en plus des 32 sommets (kangourous) ...

... 80 « arêtes » (traits de couleur),

... 80 parallélogrammes (ou carrés),

... 40 parallélépipèdes (ou cubes),

... 10 hypercubes de dimension 4,

le schéma complet étant celui d'un hypercube de dimension 5.

### Les diviseurs d'un nombre

Ce qui est fabuleux et qui a toujours fasciné l'oncle André, c'est que ce même schéma peut représenter les 32 diviseurs d'un nombre qui est le produit de 5 nombres premiers, par exemple, 2310 ! En effet  $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$ .

Et peut-être comprendrez-vous facilement les schémas successifs suivants, dans lesquels un trait représente la multiplication d'un nombre par 2 (ou 3, ou 5, ou 11, ou 7), deux traits parallèles représentant la même multiplication.



Figure 1 : un segment

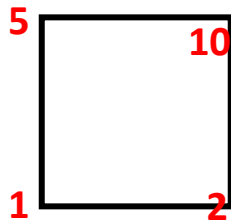


Figure 2 : un carré

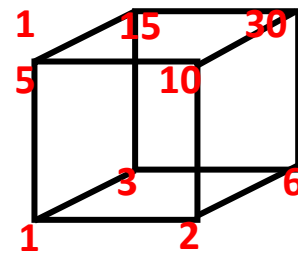


Figure 3 : un cube

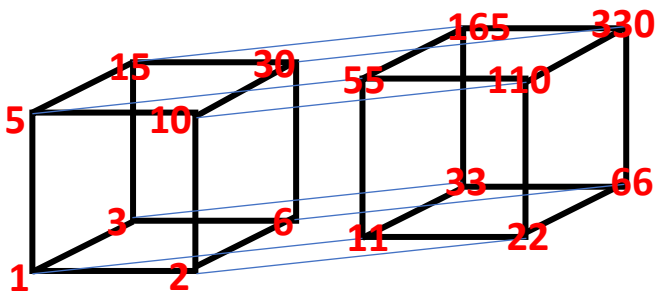


Figure 4 : un hypercube de dimension 4

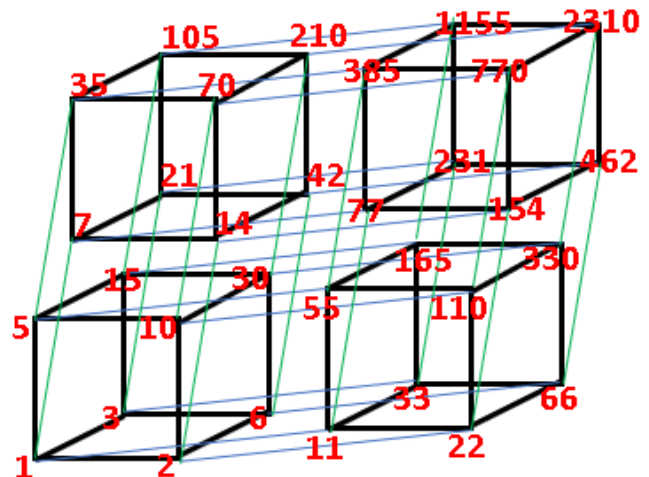


Figure 5 : un hypercube de dimension 5

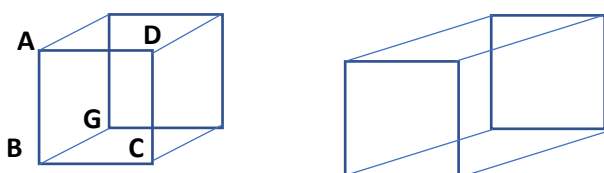
## Les cubes et hypercubes en perspective

Pour la représentation d'un hypercube sur une feuille de papier ou un écran (un plan) à 2 dimensions, on peut imaginer qu'il est d'abord projeté dans notre espace à 3 dimensions. Par exemple, sur notre affiche, on a d'abord dessiné 4 cubes (extérieurs l'un à l'autre) décalés vers l'arrière ou vers la droite (en privilégiant les directions bleu-clair, bleu-foncé puis violet).

Puis on a relié ces cubes par des traits orange puis verts.

Dans ces représentations, en perspective cavalière, on a le choix de la direction et de la longueur des traits projetés, en particulier de ceux que l'on garde effectivement perpendiculaires.

Cependant, dès que l'on passe de 3 dimensions à une projection sur un plan à 2 dimensions, on ne distingue plus les premiers plans des arrière-plans. Par exemple, pour la représentation d'un cube, un point comme G peut être représenté à l'intérieur de la représentation de la face ABCD ou non (alors qu'il est, dans la troisième dimension, à la frontière du cube, exactement comme le sont les 8 sommets).



De la même façon, dans la représentation des hypercubes (figures 4 et 5), nous avons choisi d'allonger les traits bleus et verts de façon que les représentations habituelles des cubes soient bien séparées.

C'est une autre option qui avait été choisie dans l'hypercube du *Jardin des maths* de l'oncle André (photo ci-dessous) où les deux « vrais » cubes « ont l'air » imbriqués l'un dans l'autre.

Et c'est encore une autre option qui est choisie pour le dessin de droite, qui rend mieux compte de la symétrie de cet objet.

