

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

----

SESSION DE 2009

----

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

**(Classe terminale S)**

DURÉE : 5 heures

----

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

*L'énoncé comporte trois exercices indépendants.*

*Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.*

*Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

## Exercice I

### Analyse

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbf{R}$ , à valeurs dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , vérifiant pour tout réel  $x$  la relation  $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$ , telles que  $f(0) = 1$  et que  $\frac{1-f(x)}{x^2}$  admette une limite lorsque  $x$  tend vers 0, que l'on notera  $a$ .

On rappelle que tout  $x$  de  $[-1, 1]$  s'écrit de façon unique  $x = \cos(\theta)$  avec  $\theta$  dans  $[0, \pi]$ .

1. (a) Vérifier  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$ . (On pourra utiliser une formule donnant  $\cos(2\alpha)$ ).
- (b) Montrer, pour  $\theta$  dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , les relations :  $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta)$  et  $\cos(\theta) \leq 1 - \frac{\theta^2}{\pi}$ .
2. Soit  $f$  une fonction solution du problème On se donne un réel  $x$  et l'on pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$ , avec  $\theta_n$  dans  $[0, \pi]$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est continue en 0 et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ .
  - (b) Vérifier l'existence d'un entier  $N$  tel que pour  $n \geq N$  on ait  $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ .
  - (c) Établir que  $a$  est positif et que  $f(x) = \cos(x\sqrt{2a})$ .

## Exercice II

### Probabilités

### Jouons aux dés

Je joue avec 4 dés à 20 faces. Chacun de ces dés, dont la forme est un icosaèdre, a ses faces numérotées de 1 à 20. Lorsqu'on le lance, chaque face apparaît sur le dessus avec la même probabilité de  $\frac{1}{20}$ .

Lorsque, parmi les 4 dés, une face apparaît au moins deux fois, je marque le nombre de points correspondant à cette face. Ainsi :

- avec la combinaison 3 - 4 - 12 - 16, je ne marque rien ;
- avec la combinaison 2 - 8 - 11 - 11, je marque 11 points ;
- avec la combinaison 4 - 9 - 9 - 9, je marque 9 points ;
- avec la combinaison 7 - 7 - 14 - 14, je marque 21 points ;
- avec la combinaison 2 - 2 - 2 - 2, je marque 2 points.

1. Quelle est la probabilité que je ne marque rien ?
2. Soit  $a$  compris entre 1 et 20. Déterminer pour tout  $k \leq 4$  la probabilité d'avoir exactement  $k$  nombres  $a$  parmi les dés lancés.
3. Pour tout  $a$  on note  $X_a$  la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a au moins deux dés égaux à  $a$  parmi les quatre du lancer, et à 0 sinon.

Préciser la loi de  $X_a$  et exprimer le gain  $G$  à l'aide de ces variables.

Combien de points puis-je espérer en moyenne ?

4. Quelle est la probabilité que je marque exactement 8 points ?

On suppose à partir de maintenant qu'après avoir lancé les 4 dés, je sois autorisé à relancer entre 0 et 4 dés pour améliorer mon score.

5. J'ai obtenu 11 - 7 - 2 - 2. J'hésite entre tout relancer, garder le 11, et garder les deux 2. Que dois-je faire ?

6. On suppose que j'ai obtenu 4 dés différents  $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ . Quels dés dois-je relancer ?

### Exercice III Arithmétique

Étant donné deux entiers  $a$  et  $b$ , on désigne par  $\llbracket a, b \rrbracket$  l'ensemble des nombres entiers compris au sens large entre  $a$  et  $b$ .

On considère une suite finie à  $n$  termes  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

On dit qu'un entier strictement positif  $p$  est une période de  $U$  si l'on a  $u_i = u_{i+p}$  pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n - p$ . Une suite peut avoir plusieurs périodes.

1. On considère deux entiers strictement positifs  $a$  et  $b$  premiers entre eux.
  - (a) On définit  $r_k$  comme le reste de la division de  $ka$  par  $a + b$ . Montrer que lorsque  $k$  varie dans  $\llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$ ,  $r_k$  prend toutes les valeurs de  $\llbracket 1, a + b - 1 \rrbracket$ .
  - (b) En déduire que si  $a$  et  $b$  sont périodes de  $U$  et si  $n \geq a + b - 1$  alors  $U$  est constante.
2. On suppose à présent que  $a$  et  $b$  sont des entiers strictement positifs de PGCD  $d$ . Montrer que si  $U$  est périodique de périodes  $a$  et  $b$  et si  $n \geq a + b - d$ , alors  $U$  est de période  $d$ .
3. On considère deux entiers  $a$  et  $b$  strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux.
  - (a) Montrer que l'on peut partager l'intervalle  $\llbracket 1, a + b - 2 \rrbracket$  en deux sous-ensembles non vides  $A$  et  $B$  de manière que la suite  $V$  égale à 1 sur  $A$  et à 0 sur  $B$  soit de périodes  $a$  et  $b$ .
  - (b) Le partage obtenu à la question précédente est-il unique ? Montrer que, pour tout  $x$  de  $A$ ,  $a + b - 1 - x$  est dans  $A$ . Quelle propriété de la suite  $V$  traduit-on ainsi ?