

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2008

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice I

On munit le plan affine euclidien \mathcal{P} d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit S la courbe d'équation

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de S ?
2. Pour tout couple (u, v) de nombre réels on note U le point de coordonnées (u, v) , et pour x dans \mathbf{R} on note $M(x)$ le point de S d'abscisse x . On pose

$$f_U(x) = UM(x), \quad g_U(x) = [f_U(x)]^2.$$

- (a) Calculer g_U, g'_U , et g''_U . Résoudre l'équation $g''_U(x) = 0$.
 - (b) Donner le tableau des variations de f_U (on ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où f_U admet un extremum relatif).
3. On dira qu'un cercle C de centre U et de rayon UM est tangent en M à S si M est un point de S et si les tangentes en M à C et S coïncident.

Soit U un point du plan n'appartenant pas à S , et soit a dans \mathbf{R} . Montrer que le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$ est tangent en $M(a)$ à S si et seulement si $g'_U(a) = 0$.

4. (a) Montrer que tout point n'appartenant pas à S est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à S .
 - (b) Pour U n'appartenant pas à S , on note $n(U)$ le nombre de réels x pour lesquels le cercle de centre U et de rayon $UM(x)$ est tangent en $M(x)$ à S . Pour $1 \leq i \leq 3$, caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points U n'appartenant pas à S tels que $n(U) = i$. On pourra être amené à discuter selon le signe de $81u^2 - 16v^3$.
Faire un croquis représentant S et les ensembles trouvés.
5. (a) Soit a dans \mathbf{R} . On note $D(a)$ la tangente en $M(a)$ à S . Donner une équation de $D(a)$.
 - (b) On note de nouveau U le point de \mathcal{P} de coordonnées (u, v) . Discuter en fonction de u et v l'ensemble des solutions a de l'équation $U \in D(a)$.
 - (c) On suppose que l'équation $U \in D(a)$ admet deux solutions distinctes a_1 et a_2 . Montrer que, si $UM(a_1) = UM(a_2)$, alors on a $u = 0$.
 - (d) Soit $U \in \mathcal{P}$. On suppose maintenant qu'il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts M et N de S . Montrer que les tangentes à S en M et N sont concourantes, et que si l'on note V leur point d'intersection on a $VM = VN$.
 - (e) Déterminer l'ensemble des points U n'appartenant pas à S pour lesquels il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts de S .

Exercice II

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère un triangle ABC dont aucun côté n'est parallèle à l'axe des ordonnées Oy . À toute droite \mathcal{D} non parallèle à Oy on associe les points A' , B' et C' intersections de \mathcal{D} avec les parallèles à Oy menées par A , B et C respectivement.
Montrer qu'il existe une unique droite \mathcal{D} pour laquelle la somme s des longueurs $AA' + BB' + CC'$ est minimale, et la caractériser.
2. Montrer qu'il existe une droite \mathcal{D} pour laquelle la somme s_1 des distances de A , B et C à \mathcal{D} est minimale. Montrer que cette droite est unique si ABC n'est pas isocèle, et la caractériser.

Exercice III

Les comptes « ronds »

Mon boucher ne compte jamais les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 euros le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

1. En ramassant deux tickets tombés par terre, le boucher lit :
 - 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros ;
 - 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?
 2. Pourquoi est-ce que la donnée de tous les tickets de la journée ne peut en aucun cas permettre de déterminer le prix exact de chacun des produits vendus ?
-